

S. チャンドラセカール著

恒星内部構造論 (1)

恒星の構造、組成およびエネルギー源

S. Chandrasekhar

The Structure, the Composition
and the Source of Energy of the Stars

Chapter 14 of "Astrophysics" ed. by J. A. Hynek
McGraw-Hill Co. 1951.

小山 伸 訳
加藤 賢一 採録、補

恒星内部構造論(1)

恒星の構造, 組成およびエネルギー源

目 次

本書について 加藤賢一	1
恒星内部構造論 チャンドラセカール	2
Chapter 1. 恒星内部の物理条件	4
§1. 平衡方程式	4
§2. 恒星内部の電離状態	15
§3. 恒星内の熱輸送の機構	24
§4. 恒星の不透明度	34
§5. 理論的な質量-光度-半径関係と主系列星の構造モデル	43
Chapter 2. 恒星のエネルギー源	59
§6. 太陽の時間尺度	59
§7. 炭素-窒素循環	64
§8. 陽子-陽子反応	74
Chapter 3. 恒星の組成	77
§9. 質量-光度-半径関係	77
§10. エネルギー放出式	79
§11. 恒星内部の物質の攪拌	84
§12. 永年平衡	86
§13. 低温主系列星と巨星に関する備考	90
Chapter 4. 白色矮星の構造	91
§14. 縮退電子ガスの状態方程式	91
§15. 白色矮星の構造	97
§16. 縮退の判別	104
Chapter 5. 恒星進化に関する備考	107
§17. 恒星進化	107

本書について

本書は香川大学教育学部で長らく教鞭をとられた故小山伸氏（1927-1998、在職期間：1951-1991）が翻訳されたもので、講義用資料として作成されたようである。

2017 年頃、同大学の出身である大島修氏よりコピーを pdf 化したファイルを提供していただいた。内部構造論を手短に解説したものとしては秀逸と思われたので改めて読んでみることにしたが、ところどころ判読が困難な箇所があったため、それを追跡するにも明瞭なコピーが欲しいと思い、こうした形に作成し直してみた。

まだ巨星の構造がはっきりせず、したがって進化への理解もまだまだという段階にあった時代の産物である。また、中性子星やブラックホールの発見前で、大質量星の最後についてははなはだ歯切れが悪い。当時、こうした天体の研究を進めていたチャンドラセカールとしては何をか言いたくてもはっきりと言にくい状況だったのだろうと想像させる。執筆以来 70 年余を経て、本書は歴史を刻む一書となったと言えよう。

なお、小山伸氏による恒星大気論の同種のテキストが大島修氏の次のページに掲載されている。併せて参照して戴ければ参考になろうかと思う。

<https://otobs.org/hiki/?Astrophysics+of+Stellar+Atmospher>

小山伸氏の香川大学での様子や人物像については、例えば片山敏彦 『チャンドラセカール「星の構造」と我が人生』（天文教育 2010 年 9 月号）を参照していただきたい。

https://tenkyo.net/kaiho/pdf/2010_09/2010-09-05.pdf

2023 年 1 月 10 日

星学館

加藤 賢一

恒星内部構造論

恒星の構造, 組成およびエネルギー源

チャンドラセカール

恒星の質量は電子の質量の 10^{60} 倍もある。しかし、ある意味では、それらはもっとずっと大きいとも言える。われわれの時代の主役は電子なのか、恒星なのか、何れとも断言しがたい。

A.S.Eddington

恒星の内部構造論は恒星内部の物理学的な条件を研究する天体物理学の一分野である。恒星の進化, その他, 天体物理学, 宇宙論のもっと大きい問題を研究するには個々の恒星の構造がよく理解されていなければならない。

恒星の構造論の主要な研究目的は

1. 密度・温度・圧力などの物理性質が恒星内部でどう変わるか
2. 恒星内部のエネルギー輸送や温度傾斜を保つのに、輻射・伝導・対流のうちどの輸送が重要であるか
3. この熱輸送は、どんな物理過程で行なわれているか
4. 恒星内部で起こっているはずの非可逆過程を決定し、恒星のエネルギー源を求める
5. 恒星内部の物質の化学組成が求められるか
6. 以上の知識に基づき、恒星の起源や進化について一般的結論が得られるか

この目的には基礎になる天文学的データが必要であるが、それらは何らかの意味で恒星を全体的に特徴づけるものでなければならない。われわれが恒星の構造を問題にするのは「恒星全体として」であるからである。

太陽のような恒星を考える場合、質量 $M(\text{g})$, 半径 $R(\text{cm})$ が重要なデータであることは直ぐわかる。更に恒星は絶えず輻射を空間に放出しているので、光

度 $L(\text{erg/sec})$ も M , R とともに基本的な量である.

実際, 観測から得られる質量, 半径, 光度, あるいはそれらの相互関係は恒星構造の研究に重要な知識である. この他にも補足的な知識が種々の恒星から得られる. 脈動変光星からは変光周期と上の基本的パラメーターとの関係, 連星からは長軸の回転から恒星内部の密度分布などが推定される. しかし, ここでは最も簡単な, 定常的で, 自転していない単独星を考えよう.

Chapt. 1. 恒星内部の物理条件

§ 1. 平衡方程式 The equilibrium equations.

恒星の内部構造論の唯一の方法は理論物理学に基づく推論である。従って一つの結論を得るためには多くの仮定を設けるが、得られた理論の正否は、理論的に矛盾がないか、また自己撞着がないか、によって判断される。従って、特定の結論に達するにはどれが本質的な要素であるかに気づかなければならない。第一歩は、できるだけ少ない仮定で、恒星内部の物理状態のおよその概念を得ることである。

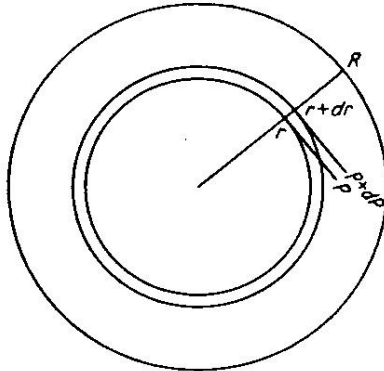


FIG. 14.1

太陽は何十億年も輝いてきた単独星だから、内部の任意の点で、それより上層の重さと下方からの圧力が平衡を保っているに違いない。前者は下方に重力を及ぼして下の物質を押し潰そうとし、後者は膨張して上層の物質を外方へ押し上げようとする。このことを「恒星は自己重力で静流体力学平衡にある」と言う。

図のように、恒星の中心 C から距離 r の点で半径方向に置いた底面積 1 、高さ dr 、質量 dm の小体積を考え、これの上下両面に働く圧力差を dP とすれば、それは半径 r 内部の質量 $M(r)$ による重力と釣り合い

$$dP = -g \, dm = -g\rho dr \quad (1)$$

となる。ここで g は距離 r の点での局所的な重力加速度、 ρ は局所的な密度である。 g は万有引力の法則により

$$g = GM(r)/r^2 \quad (2)$$

で、 $G(6.67 \times 10^{-8} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2/\text{g}^2)$ は重力定数である。従って、重力による静流体力学平衡の条件は

$$dP/dr = -((GM(r))/r^2)\rho \quad (\text{圧力分布の式}) \quad (3)$$

である。半径 r 、厚み dr の球殻の質量 $dM(r)$ は $4\pi r^2 \rho dr$ だから

$$(dM(r))/dr = 4\pi r^2 \rho \quad (\text{質量分布の式}) \quad (4)$$

あるいは積分形で書けば

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr$$

である。

恒星内部で圧力 P に寄与するのは輻射圧 P_r と物質のガス圧 P_g である。輻射圧はステファン・ボルツマン Stefan-Boltzman の法則により

$$P_r = aT^4/3 \quad (5)$$

で、 T は局所的な絶対温度、 $a(= 7.75 \times 10^{-15})$ は輻射定数である。局所的なガス圧と温度・密度との関係は状態方程式で決まる。後で考察するように、大抵の恒星の内部では、近似的に理想気体の状態方程式*

$$P_g = (k/\mu H)\rho T \quad (6)$$

が成り立つ．ここで $k(= 1.38 \times 10^{-16})$ はボルツマン定数， $H(= 1.67 \times 10^{-24} \text{ g})$ は水素原子の質量， μ 平均分子量である．恒星内部の条件での化学組成と μ の値との関係は重要な問題なので後で詳しく考えるが，ここではそれが $5 \leq \mu \leq 2.0$ の範囲にあることだけを述べておく．

暫定的に理想気体の状態方程式(6)を受け入れ

$$P = P_r + P_g = (aT^4)/3 + (k/\mu H)\rho T \quad (7)$$

恒星内部の圧力分布(3)，質量分布(4)が与えられると内部の圧力，温度の大きさが推定できるが，便宜的にもう一つの仮定を置く：

「恒星内部の任意の点で，温度や密度が外向きには増加しない」

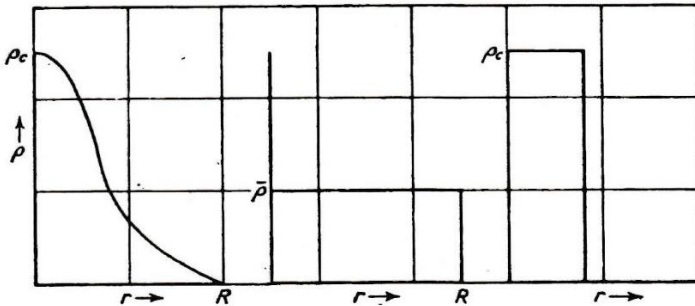


FIG. 14.2

と仮定する．この制限は当然だとも言えない．非定常な恒星ではこの制限は成立たない．

さて，質量 M ，半径 R の恒星を考えよう．密度 ρ は中心で最大値 ρ_0 を取り，中心からの距離 r とともに減少し，恒星表面 $r = R$ で $\rho = 0$ となるはずだから，その物質配置は図の a のようなものと想像される．

これに対して密度一定の極端な2つの平衡配置を考える．

- b : 恒星の平均密度 $\bar{\rho}(= M/(4/3)\pi R^3)$ に等しく均された一定密度を持つ
- c : 恒星の中心密度 ρ_c に等しい一定密度を持つ

こうすれば、現実の恒星の内部の圧力状況は、これら密度一様な両極端な配置から得られるものの中間にあることが容易にわかる。また、恒星の中心圧力 ρ_c もこれら両極端な場合の中間にあることが次のようにしてわかる。恒星の中心圧力は恒星の物質を中心近くに集めるほど増加し、物質を外方へ移すほど減少する。従って、中心圧力が最大になるのは物質をできるだけ中心に集め、 ρ_c に等しい一様密度にした場合(c)、最小となるのは物質をできるだけ中心から通さげ（仮定によって ρ は外方に増加しないから） $\bar{\rho}$ に等しい一様密度にした場合(b)である。

さて(3), (4)を組合せ

$$dP = -(G/4\pi)\{M(r)/r^4\}dM(r) \tag{8}$$

この式を中心 ($r = 0, M(r) = 0, P = P_0$) から表面 ($r = R, M(r) = M, P = 0$) まで積分すれば

$$P_c = (G/4\pi) \int_0^M \{M(r)/r\} dM(r) \tag{9}$$

次に平均圧力 \bar{P} として質量による加重平均をとり

$$\begin{aligned} \bar{P} &= (1/M) \int_0^M P dM(r) && \text{部分積分で} \\ &= (1/M) \{ [P \cdot M(r)]_0^M - \int_{P_c}^0 M(r) dP \} \\ &= (1/M) \int_0^{P_c} M(r) dP \end{aligned}$$

この dP に(8)式を代入し

$$\bar{P} = (G/4\pi)(1/M) \int_0^M \{M(r)^2/r^4\} dM(r) \quad (10)$$

同様に平均温度 \bar{T} として

$$\bar{T} = (1/M) \int_0^M T dM(r)$$

結果的に言って太陽程度の恒星では、輻射圧 P_r はガス圧 P_g に比べてまだまだ小さく、 P としては(7)式の第1項を省略して第2項だけを取り、その T を上式に代入すれば

$$\bar{T} = (1/M)(\mu H/k)4\pi \int_0^M (P/\rho) dM(r)$$

この $dM(r)$ に(4)式を代入し

$$\begin{aligned} \bar{T} &= (1/M)(\mu H/k)4\pi \int_0^R P r^2 dr && \text{部分積分により} \\ &= (1/M)(\mu H/k)(4\pi/3) \int_0^{P_0} r^3 dP \end{aligned}$$

この dP に(8)式を代入すれば

$$\bar{T} = (1/M)(G/3)(\mu H/k) \int_0^M \{M(r)/r\} dM(r) \quad (11)$$

となる。(9), (10), (11)式を見れば P_c , \bar{P} , \bar{T} が全て積分

$$I_{i,j} = G \int_0^M \{M(r)^i/r^j\} dM(r) \quad \text{但し } 3(i+1) > j \quad (12)$$

の形で表現されており

$$P_c = (1/4\pi)I_{14}, \quad \bar{P} = (1/4\pi M)I_{24}, \quad \bar{T} = (\mu H/3kM)I_{11} \quad (13)$$

である。さて半径 r の球内部の平均密度 $\bar{\rho}(r)$ は

$$\bar{\rho}(r) = M(r)/\{(4\pi/3)r^3\} \quad (14)$$

であるから、これから

$$r^j = [(3/4\pi)\{M(r)/\bar{\rho}(r)\}]^{j/3} \quad (15)$$

これを(12)式に代入すると

$$I_{ij} = G(4\pi/3)^{j/3} \int_0^M \bar{\rho}(r)^{j/3} M(r)^{(3i-j)/3} dM(r) \quad (16)$$

われわれの仮定では、 $\bar{\rho}(r)$ は外向きには増加しない。積分 I_{ij} の上限・下限を求めるために、前記の2つの極端な密度配置に対応して、積分記号内の $\bar{\rho}(r)$ を置き換える。 $\bar{\rho}(r)$ を一定値 ρ_c で置き換え、積分記号の外に出せば積分(16)の上限が得られ、同様に $\bar{\rho}(r)$ を一定値 $\bar{\rho}$ で置き換えると積分(16)の下限が得られる。後に残る $M(r)$ だけについての積分は $3(i+1) > j$ の時に収束するが、今の場合にはこれが満たされている。こうして I_{ij} 両限が求まり

$$A_{ij} = [3G/\{3(i+1) - j\}](4\pi/3)^{j/3} M(r)^{(3i+3-j)/3}$$

と書くことにすれば

$$A_{ij}\rho_c^{j/3} \geq I_{ij} \geq A_{ij}\bar{\rho}^{j/3} \quad (17)$$

これを(13)式に代入する。今

$$B \equiv G(4\pi/3)^{1/3} M^{2/3}$$

$$C \equiv B(\mu H/k)$$

と置けば

$$(1/2)B\rho_c^{4/3} \geq P_c \geq (1/2)B\bar{\rho}^{4/3} \quad (18)$$

$$(1/5)B\rho_c^{4/3} \geq \bar{P} \geq (1/5)B\bar{\rho}^{4/3} \quad (19)$$

$$(1/5)C\rho_c^{1/3} \geq \bar{T} \geq (1/5)C\bar{\rho}^{1/3} \quad (20)$$

恒星全体としての密度

$$\bar{\rho} = M/(4\pi/3)R^3 \quad (21)$$

を(18)～(20)式に代入すれば

$$(3/8\pi)(GM^2/R^4) \leq P_c \leq (3/8\pi)(GM^2/R^4)(\rho_c/\bar{\rho})^{4/3} \quad (22)$$

$$(3/20\pi)(GM^2/R^4) \leq \bar{P} \leq (3/20\pi)(GM^2/R^4)(\rho_c/\bar{\rho})^{4/3} \quad (23)$$

$$(1/5)(\mu H/k)(GM/R) \leq \bar{T} \leq (1/5)(\mu H/k)(GM/R)(\rho_c/\bar{\rho})^{1/3} \quad (24)$$

恒星の中心温度 T_c の下限を求めるのはやや困難である。しかし、恒星の内部で μ が一定で、 ρ と T が外向きに増加せず、理想気体の状態方程式が成立つ条件の下では

$$T_c \geq (1/2)Q(\mu H/k)(GM/R) \quad (25)$$

が得られる。 Q は M と μ によって決まる複雑な因子で、次の表1のような値をとる。太陽程度の恒星では $Q \sim 0.6$ くらいの値で、質量 M の増大にともなって緩やかに減少する。

(22)～(25)式の物理定数に数値を代入し、質量、半径をそれぞれ、太陽の質量 ($M_\odot = 1.985 \times 10^{33}$ gm) , 半径 ($R_\odot = 6.951 \times 10^{10}$ cm) を単位にして表すと

TABLE 14.1. VALUES OF Q FOR DETERMINING THE MINIMUM CENTRAL TEMPERATURES OF STARS

$\frac{M}{\odot} \mu^2$	Q	$\frac{M}{\odot} \mu^2$	Q	$\frac{M}{\odot} \mu^2$	Q	$\frac{M}{\odot} \mu^2$	Q
0	0.640	9.2	0.524	28.8	0.364	86.3	0.230
2.301	0.624	10.4	0.508	34.5	0.337	132	0.189
3.452	0.610	11.5	0.494	40.3	0.318	237	0.144
4.602	0.592	14.4	0.463	46.0	0.300	539	0.0976
5.753	0.574	17.3	0.438	51.8	0.287	∞	0
6.90	0.557	20.1	0.414	57.5	0.273		
8.05	0.541	23.0	0.396	71.9	0.246		

$$P_c \geq 1.326 \times 10^9 (M/M_\odot)^2 (R_\odot/R)^4 \text{ 気圧} \quad (26)$$

$$\bar{P} \geq 4.3 \times 10^8 (M/M_\odot)^2 (R_\odot/R)^4 \text{ 気圧} \quad (27)$$

$$\bar{T} \geq 4.61 \times 10^6 \mu (M/M_\odot) (R_\odot/R) \quad (P_r \text{ は無視}) \quad (28)$$

$$T_c \geq 1.153 \times 10^6 Q \mu (M/M_\odot) (R_\odot/R) \quad (29)$$

が得られる。数個の代表的な恒星に対して(26)~(29)式で得られる P_c , \bar{P} , T_c , \bar{T} の下限の値は次の表2のようである。この表から主系列星の内部に対して 10^7K 程度の温度と 10^{10} 気圧程度の圧力が予想される。

TABLE 14.2. THE MINIMAL CONDITIONS IN THE INTERIORS OF SOME TYPICAL STARS

Star	M	R	L	P_c (min), atmospheres	\bar{P} (min), atmospheres	\bar{T} (min), millions of degrees	T_c (min), millions of degrees			
							$\mu = 1$		$\mu = 2$	
							$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu = 1$	$\mu = 2$
Sun.....	1.00	1.00	1.00	1.326×10^9	5.30×10^8	4.6	7.4	14.0	0.030	0.209
\dagger Her.....	1.12	2.04	4.57	9.60×10^7	3.84×10^7	2.5	4.0	7.5	0.036	0.232
α CMi.....	1.63	1.70	5.75	4.22×10^8	1.685×10^8	4.4	7.0	13	0.067	0.313
α CMa.....	2.34	1.78	38.9	7.24×10^8	2.89×10^8	6.1	9.4	16	0.113	0.393
μ Sco.....	12.4	5.37	5500	2.45×10^8	9.80×10^7	10.6	13	15	0.454	0.696
Capella.....	4.18	15.8	120	3.74×10^8	1.495×10^8	1.2	1.8	2.6	0.218	0.513

上の一般的な考察から求められるもう一つの重要な因子は、全圧力 P の中にしめるガス圧 P_g および輻射圧 P_r の相対的な割合である。この際、全圧力 P に対するガス圧 P_g の比を $\beta \equiv P_g/P$ と定義すると都合がよい。即ち

$$P_g = (k/\mu H)\rho T = \beta P, \quad P_r = (a/3)T^4 = (1 - \beta)P \quad (30)$$

この両式から P , T を次々に消去すると

$$\begin{aligned} T &= [(k/\mu H) (3/a)\{(1 - \beta)/\beta\}]^{1/3} \rho^{1/3} \\ P &= (k/\mu H\beta)\rho T = [(k/\mu H)^4 (3/a)\{(1 - \beta)/\beta^4\}]^{1/3} \rho^{4/3} \end{aligned} \quad (31)$$

特に恒星の中心では

$$P_c = [(k/\mu_c H)^4 (3/a)\{(1 - \beta_c)/\beta_c^4\}]^{1/3} \rho_c^{4/3} \quad (32)$$

この P_c の式を(18)式の左辺と比較すれば

$$[(k/\mu_c H)^4 (3/a)\{(1 - \beta_c)/\beta_c^4\}]^{1/3} \leq (\pi/6)^{1/3} GM^{2/3}$$

が得られるが、これを書換えると

$$M \geq (6/\pi)^{1/2} [(k/\mu_c H)^4 (3/a)\{(1 - \beta_c)/\beta_c^4\}]^{1/2} G^{-3/2} \quad (33)$$

となる。この式の等号が成立つ場合の β_c の値を β^* と定義する。即ち

$$\beta^* = \beta^*(M, \mu_c) \text{ により}$$

$$M = (6/\pi)^{1/2} [(k/\mu_c H)^4 (3/a)\{(1 - \beta^*)/\beta^{*4}\}]^{1/2} G^{-3/2} \quad (34)$$

と置けば、(33), (34)により

$$(1 - \beta_c)/\beta_c^4 \leq (1 - \beta^*)/\beta^{*4} \quad (35)$$

を得る．ところが $(1 - \beta)/\beta^4$ という関数は $(1 - \beta)$ の単調増加関数であるから(35)が成立つことは

$$1 - \beta_c \leq 1 - \beta^* \quad (36)$$

が成立つことである．即ち恒星の中心での輻射圧 P_r と全圧力 P との比 $(1 - \beta_c)$ は M と μ_c で決まるある値 $(1 - \beta^*)$ を越えることはできない．表 3 には種々の $(M/M_\odot)\mu_c^2$ の値に対する $(1 - \beta_c)$ の上限 $(1 - \beta^*)$ の値が示してある．

代表的な恒星に対する $(1 - \beta^*)$ の値は表 2 に示してあったが，その値を見ると太陽質量 M_\odot の 2~3 倍以下の質量の恒星では，静流体力学平衡式の圧力 P の中で輻射圧 P_r を無視しても，それほど誤差を生じないことがわかる．後にわかるように， $\mu_c \sim 1$ の程度の値である．

β^* に対する(34)式からもう一つ興味ある問題が得られる．それはこの式が物理定数の組み合わせによって左辺には質量の Dimension の量だけが孤立していることである．即ち

$$[M] = (6/\pi)^{1/2} [(k/H)^4 (3/a)]^{1/2} G^{-3/2} \quad (37)$$

ここで

$$a = (8\pi^5 k^4)/(15c^3 h^3) \quad (38)$$

であるから(37)は簡単になって

$$[M] = \{(135)^{1/2}/2\pi^3\} (hc/G)^{3/2} H^{-2} \sim 5.4 M_\odot \quad (39)$$

TABLE 14.3. THE MAXIMUM RADIATION PRESSURE IN STARS

$1 - \beta^*$	$\frac{M}{\odot} \mu_c^2$	$1 - \beta^*$	$\frac{M}{\odot} \mu_c^2$	$1 - \beta^*$	$\frac{M}{\odot} \mu_c^2$
0.01	0.56	0.14	2.77	0.35	7.67
0.02	0.81	0.15	2.94	0.40	9.62
0.03	1.01	0.16	3.11	0.45	12.15
0.04	1.19	0.17	3.28	0.50	15.49
0.05	1.36	0.18	3.46	0.55	20.06
0.06	1.52	0.19	3.64	0.60	26.52
0.07	1.68	0.20	3.83	0.65	36.05
0.08	1.83	0.21	4.02	0.70	50.92
0.09	1.98	0.22	4.22	0.75	75.89
0.10	2.14	0.23	4.43	0.80	122.5
0.11	2.29	0.24	4.65	0.85	224.4
0.12	2.45	0.25	4.87	0.90	519.6
0.13	2.61	0.30	6.12	1.00	∞

原子物理学に基づいた普通の恒星の構造理論が、うまく成功する基本的な理由は $(hc/G)^{3/2}H^{-2}$ という量が、恒星の質量の大きさ程度の値であるという事実によると思われる。

Dimension が質量になるような、定数 h 、 c 、 G 、 H の最も一般的な組み合わせは $(hc/G)^\alpha H^{1-2\alpha}$ で、 α は任意の数値である。 $\alpha = 1.5$ 、 1.75 、 2.0 の等差級数に対して上の組み合わせで表される質量はそれぞれ $5.4 M_\odot$ 、 $1.7 \times 10^{11} M_\odot$ 、 $9.5 \times 10^{20} M_\odot$ となり、その値はそれぞれ恒星、銀河系、宇宙の程度の値である。後の二者が全く偶然に一致によるのか、あるいは現在でも未知な何か原子論と宇宙論との間の、ずっと奥深い関係を示しているのかも知らない。

§2. 恒星内部の電離状態 The ionization state in the stellar interior

恒星内部の概略の温度を推定するため、われわれは理想気体の状態方程式を用い、それに含まれる平均分子量 μ が、詳しい理論から $0.5 < \mu < 2.0$ の範囲にあると述べておいた。次にその理由を調べよう。

ある μ の値を仮定したとする。すると§1で求めておいた不等式から恒星内部の概略の温度が推定できる。この温度では、広範囲の密度の値に亘って、殆どの元素が相当数の電子を失ってしまっていて、それが占める体積が著しく小さくなり、それによる気体法則からのずれは無視できることがわかり、また電離のために生ずる自由電子の数が極めて多く、平均分子量 μ （酸素 $O = 16$ として、全ての自由粒子1個当たりの平均の質量）を決定するのは主にHとHeの相対量であって、その他の元素の相対量には余り依存しないことがわかる。従って問題はある μ の値を仮定すると温度が決まる。温度が決まると原子の電離状態が決まる。電離状態が決まると μ が決まる。この最後に得られた μ の値が最初に仮定した μ の値に等しいかどうかである。このような議論はもっと定量的に次のように考える。

電離平衡式

$$X^{(n)} \leftrightarrow X^{(n-1)} + e \quad (1)$$

を考える。ここで $X^{(n)}$ 、 $X^{(n-1)}$ はそれぞれ、まだ n 個、 $(n-1)$ 個の束縛電子を保有しているイオン（または原子）、 e は自由電子を表している。これらの1cc当たりの粒子密度を $N^{(n)}$ 、 $N^{(n-1)}$ 、 N_e と書く。また、この電離に対する電離ポテンシャルを $\chi^{(n)}$ とすればサハの熱電離の式により

$$\begin{aligned} & N^{(n-1)} N_e / N^{(n)} \\ &= \{(2\pi m k T)^{3/2} / h^3\} \{2g^{(n-1)} / g^{(n)}\} \exp\{-\chi^{(n)} / kT\} \end{aligned} \quad (2)$$

あるいは電子圧 $P_e = N_e kT$ を用いて書けば

$$N^{(n-1)} P_e / N^{(n)}$$

$$= \{(2\pi m)^{3/2}(kT)^{5/2}/h^3\}\{2g^{(n-1)}/g^{(n)}\} \exp\{-\chi^{(n)}/kT\} \quad (2')$$

但し、 $g^{(n)}$ 、 $g^{(n-1)}$ はそれぞれ、イオン $X^{(n)}$ 、 $X^{(n-1)}$ の分配関数である。
ここで

$$\begin{aligned} \exp\{\psi/kT\} &= (2/N_e)\{(2\pi mkT)^{3/2}/h^3\} \\ &= (2/P_e)\{(2\pi m)^{3/2}(kT)^{5/2}/h^3\} \end{aligned} \quad (3)$$

と置いて **Dominant potential** ψ を定義すれば、 ψ の値により電離状態を表すことができる。何故なら、(統計的分配関数の因子を無視して)

$$N^{(n-1)}/N^{(n)} = \exp\{(\psi - \chi^{(n)})/kT\} \quad (4)$$

と書けるので、例えばもし $\psi \sim \chi^{(n)}$ であれば、 $N^{(n-1)} \sim N^{(n)}$ 、即ち n 個の束縛電子を持つイオン $X^{(n)}$ と、それが更に1回電離して $(n-1)$ 個の電子を残す $X^{(n-1)}$ との数が等しくなっている電離状態であることを示すからである。そこで第1近似として

$$\psi \sim \chi^{(n)} \quad (5)$$

の時、原子番号 Z の原子は殆ど $(Z-n)$ 回電離している(束縛電子は n 個以下になっている)と言うことができる。(3)式は次のように書ける。

$$\psi = 198.416(T/10^6)[(3/2)\log(T/10^6) - \log N_e + 24.684] \text{ eV} \quad (6)$$

あるいは

$$\psi = 198.416(T/10^6)[(5/2)\log(T/10^6) - \log P_e + 14.824] \text{ eV} \quad (6')$$

今、気体が1種類の元素(原子番号 Z 、原子量 A)から成ると考えよう。それ

が $(Z - n)$ 回電離すれば、生じた自由電子の粒子密度 N_e は

$$N_e = (Z - n)\rho/AH \quad (7)$$

これを(6)式に代入すると

$$\psi = 198.416(T/10^6) \times [(3/2)\log(T/10^6) - \log \rho + \log\{A/(Z - n)\} + 0.904] \text{ eV} \quad (8)$$

ここで太陽中心の最新の理論値

$$\begin{aligned} T_c &= 1.55 \times 10^7 \text{ K} \\ P_c &= 3.4 \times 10^{17} \text{ dyn cm}^{-2} \\ \rho_c &= 160 \text{ g cm}^{-3} \end{aligned}$$

を用いて調べよう。このように高密度の物質に理想気体として Boyle-Charles の法則を適用してよいだろうか。もし原子が中性原子のままであれば、その半径は 10^{-8} cm 程度、例えば Mg ($Z = 12$, $A = 24.3$) 原子では 1.58×10^{-8} cm で、原子 1 個の占める体積は 1.65×10^{-23} cm^3 である。従って Mg 原子を隙間なくぎっしり詰め込んだと仮定しても、その密度は $AH/1.65 \times 10^{-23} \sim 2.45 \text{ g cm}^{-3}$ にしかない。つまり気体のままでは上のような高密度にはなり得ない。

しかし、太陽内部では高温のため、原子の電離が高度に進み、半径の遥かに小さいイオンになってしまっている。電離が著しく進んでいることが予想されるので、(6)式に $P_e \sim P_c$ と置いて太陽中心の値を当て嵌めてみると

$$\psi_c \sim 825 \text{ eV}$$

となる。大体この電離ポテンシャルのものまでは電離してしまっていることになる。原子番号 Z の原子の最後の 1s 電子の電離ポテンシャルは近似的に

13.598 Z^2 eVと表せるので、窒素N ($Z = 7$)までは完全に原子核だけになっている。

マグネシウムMg ($Z = 12, A = 24.3$)の電離ポテンシャルについては

(1s) ² (2s) Mg X	367.5 eV
(1s) ² Mg XI	1761.8 eV
(1s) Mg XII	1963 eV

だから、K 殻電子($n = 1$) 2個が残っているだけで、それより上位の電子はみな熱電離してしまっている。このような(1s)² Mg XIイオンの半径は

$$r_1 \sim e^2 Z / 2\chi \sim 2.86 \times 10^{-10} \text{ cm}$$

体積は $9.79 \times 10^{-23} \text{ cm}^{-3}$ と小さくなっており、もしぎっしりと詰め込めるとすれば $\rho \sim 4.12 \times 10^5 \text{ g cm}^{-3}$ の高密度にまで詰め込めることになる。これから考えて太陽の中心で 160 g cm^{-3} という密度はイオン 1 個当たりの空間はイオンの大きさの 2,500 倍以上もあり、理想気体の法則が充分適用できることがわかる。

酸素 O ($Z = 8, A = 16$)の最後の電離ポテンシャルは 871.39 eVであるから、(8)式によれば、 $T = 5 \times 10^6 \text{ K}$ 、 $\rho \leq 25 \text{ g cm}^{-3}$ に対して酸素原子は全ての束縛電子を失っている。酸素の最後から 2 番目の電離ポテンシャルは 739.32 eV であるから、 $T = 5 \times 10^6 \text{ K}$ では、 $25 \text{ g cm}^{-3} < \rho < 40 \text{ g cm}^{-3}$ の範囲の密度に対して、酸素原子は多くて 2 個しか束縛電子を持っていないことがわかる。このように広範囲の密度の違いに対しても平均分子量 μ は $16/9 = 1.78$ と $16/7 = 2.29$ の間で僅かに変化するだけである。

同様に鉄 Fe ($Z = 26, A = 55.8$) では、 $T = 5 \times 10^6 \text{ K}$ で、 $\rho \leq 2.4 \text{ g cm}^{-3}$ に対して多くて 4 個の電子、 $2.4 \text{ g cm}^{-3} < \rho < 6.5 \text{ g cm}^{-3}$ に対して多くて 7 個の電子しか残しておけない。 $T = 10^7 \text{ K}$ では、それぞれに対応する密度は 65 g cm^{-3} と 116 g cm^{-3} である。そして平均分子量 μ の違いは $55.8/23 = 2.43$ と $55.8/20 = 2.79$ とに過ぎない。

このような数字から次のような結論が得られる。恒星の内部で予想される条件では、豊富な元素はかなり電離が進んでおり、理論の第 1 歩として理想気体

の法則からのずれは無視してよい。また恒星の中で最も豊饗な元素 H と He は、それぞれ陽子、 α 粒子、自由電子に完全に分離している。

以上の議論から、平均分子量 μ については殆どの目的に対して次のような簡単な考察で充分なことがわかる。種々な元素から成る混合気体を考え、原子量 A_Z の元素は気体 1 g 中に X_Z g 含まれているとする。このことを「その元素の重さによる化学組成 **Chemical abundance** が X_Z である」と言う。更にこの原子番号 Z の原子は、電離によって平均 $A_Z \bar{n}_Z$ 個の自由粒子（電離した自由電子と残っているイオン自体の和）になっていると考える。すると混合気体 1 cm^3 中の自由粒子の総数 N は

$$N = \sum_Z (\rho X_Z / A_Z H) A_Z \bar{n}_Z = (\rho / H) \sum_Z X_Z \bar{n}_Z \quad (9)$$

ここで \sum_Z は混合気体を作る全ての元素についての和である。従って気体圧は

$$P_g = N \cdot kT = (\rho k / H) (\sum_Z X_Z \bar{n}_Z) T \quad (10)$$

これを(1.6)式と比較すれば

$$\mu = 1 / (\sum_Z X_Z \bar{n}_Z) \quad (11)$$

が得られる。上で考察したように、恒星内部の条件では H と He は完全に電離しており、これらの元素に対して

$$\bar{n}_1 = 2 \quad \text{および} \quad \bar{n}_2 = 3/4 \quad (12)$$

他の全ての原子も高度に電離が進んでいることから、充分良い近似で

$$\bar{n}_Z \sim (Z + 1) / A_Z \sim Z / A_Z \sim 1/2 \quad (13)$$

と書くことができる。普通、H と He に対する化学組成 X_1 , X_2 は特別に、そ

れぞれ X , Y , その他の元素は $Z (= 1 - X - Y)$ で表すが, (12), (13)を(11)に代入すれば

$$\mu = 1/[2X + (3/4)Y + (1/2)(1 - X - Y)] \quad (14)$$

簡単にすれば

$$\mu = 2/(1 + 3X + 0.5Y) \quad (15)$$

この式を見れば, 種々の化学組成に対して μ が $0.5 < \mu < 2.0$ の範囲にあることがわかる.

1 cm^3 当たりの自由電子の粒子密度 N_e は一般的に書けば

$$N_e = (\rho/H) \sum_Z (X_Z / A_Z) (A_Z \bar{n}_Z - 1) \quad (16)$$

(12), (13)で表せる近似では

$$N_e = (\rho/H)[X + (1/2)Y + (1/2)(1 - X - Y)]$$

即ち

$$N_e = (1/2)(\rho/H)(1 + X) \quad (17)$$

μ および N_e の式 (15), (17)を見てわかるように, 恒星内部における μ の決定の主な不確かさはHとHeの化学組成 X , Y の不確かさに依ることがわかる. 後に述べるように, 恒星の構造論の主要目的の一つが恒星内部におけるこれらの化学組成の知識を求めることである.

★太陽中心における粒子のエネルギー

太陽の中心部におけるエネルギーを調べる. 量子統計力学によれば気体粒子

1個当たりの運動エネルギーは

$$\varepsilon_k = (3/2)kT$$

であるから、これに $T = 1.55 \times 10^7$ K を代入すると

$$\varepsilon_k = 3.21 \times 10^7 \text{ erg} = 2.00 \times 10^3 \text{ eV}$$

このエネルギーを

$$\varepsilon_k = (1/2)mv^2$$

で電子の速度 v に換算してみると

$$v = 2.65 \times 10^9 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

となり、光速の 1 割弱である。また

$$\varepsilon_k = (3/2)\mu HV^2$$

と置いて、原子量 μ のイオンの速度 V に換算してみると

$$V = 6.22 \times 10^7 \mu^{-1/2} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

マグネシウム Mg ($Z = 12$, $A = 24.3$) イオンでは

$$V = 1.26 \times 10^7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

1 cm^3 中の気体粒子の数は $\rho/\mu H$ だから、 1 cm^3 当たりの運動エネルギーは

$$E_k = (\rho/\mu H) \cdot (3/2)kT$$

これに $\rho_c \sim 160 \text{ g cm}^{-3}$, $\mu \sim 1$ を代入すれば

$$E_k \sim 3.09 \times 10^{17} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}$$

となる.

★太陽の中心部の輻射, 即ち光量子のエネルギー
ウィーン Wien の変移法則

$$\lambda_m T = 0.289,780$$

に $T = 1.55 \times 10^7 \text{ K}$ を代入すると

$$\lambda_m \sim 1.87 \times 10^{-8} \text{ cm} = 1.87 \text{ \AA}$$

即ち, 輻射は軟 X 線 SoftX-ray 程度である. また Stefan の法則から輻射エネルギー密度は

$$u = aT^4 \quad (a = 7.5641 \times 10^{-15} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{deg}^{-4})$$

だから, これに T_c を用い

$$u_c = 4.366 \times 10^{14} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}$$

E_k と u_c を比較してみると, 太陽では気体の運動エネルギーに対して, まだまだ輻射エネルギーが小さく, 従って輻射圧 P_r , はガス圧 P_g に比べて無視できる. しかし, 高温, 大質量の恒星になると, 次第に輻射エネルギーの割合が大きくなり, その強烈な輻射圧のために恒星そのものの安定性が問題になる.

★太陽定数

太陽定数から得られる太陽表面でのエネルギー放出量 **Emittance**

$$F = \sigma T_e^4 = 6.284 \times 10^{10} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sec}^{-1}$$

は太陽中心部の輻射エネルギー密度 u_c に比べて極めて小さい。即ち、太陽は内部に莫大なエネルギーを保有しながら、その放出は微々たるものだとも言える。このことは輻射が恒星の内部を通して洩れにくい、即ち恒星内部の物質が輻射に対して極めて不透明で、恒星内部の状態が、理想的に密閉された状態に近いことを意味している。われわれがプランク **Planck** の空洞輻射（黒体輻射）の法則を適用できるのはこのような状態に基づいている。

§3. 恒星内の熱輸送の機構

恒星は光度 Luminosity L で示される割合で、外部空間に絶えず輻射を放出している（例えば、太陽では $L_{\odot} = 3.86 \times 10^{33} \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1}$ ）。このことは、合計 L の割合で遊離されるエネルギー源が恒星の内部に分布していることを意味している。われわれは後ほど、このエネルギー源である原子核反応の仮定を考えるが、ここでは観測される光度 L に等しい熱エネルギーの連続的な流れが、あたかも熱機関のように、高温領域から低温領域へと熱の流れによって保たれていることだけを考えよう。従って恒星の内部では温度の傾斜が保たれていると想像され、熱の輸送の機構が問題になる。

熱の輸送には伝導・対流・輻射の3種類の過程がある。恒星物質の熱伝導度は（白色矮星のような特殊条件以外では）余りにも小さ過ぎて、太陽の場合に推定したように、 10^7 K 以上もある中心温度を保てない。残る熱輸送の過程は対流と輻射であるが、どちらであるかを決めなければならない。一般的に言って、対流は、対流がない場合に生ずる温度傾斜が、僅かな温度の変動に対して不安定な場合に起こる。 言い換えれば、結果的に生じた温度傾斜が温度の小変動に対して安定な場合に限り、熱は輻射で輸送されると思われる。従って先ず輻射平衡の条件で温度傾斜の式を求め、次にそれが実現するための条件を議論しよう。

恒星内部の条件を考える時、どの部分についても局所的に温度輻射の法則（および、実際的に、全ての熱力学的・統計力学的な法則）が適用できると認めなければならない。それは、基本的には次のような理由による。われわれは太陽の中心で温度は $2 \times 10^7 \text{ K}$ 程度であることを知った。太陽半径は $7 \times 10^{10} \text{ cm}$ だから、太陽内部の平均の温度傾斜は $3 \times 10^{-4} \text{ K} \cdot \text{cm}^{-1}$ という緩やかさである。また後に述べるように、恒星内部の物質は輻射に対して非常に有効な吸収体で、極めて不透明であって、恒星内部のどの点の物質も、周囲の僅か数 mm 離れた物質からも有効に遮蔽されている。事実、恒星の内部では「一寸先も見えない」。従って局所的には、実験室でも実現し得ないほどの熱力学的平衡の条件が実現している。従って恒星内部の各点の輻射がプランク Planck の法則により、その点の局所的な温度 T だけで決まり

$$B_\nu(T) = (2h\nu^3/c^2)[1/\{\exp(h\nu/kT) - 1\}] \quad (1)$$

だと考えてそう誤差はない。これに対応する輻射圧の式は(1.5), (1.38)より

$$P_r = (4\pi/3c) \int_0^\infty B_\nu d\nu = (8\pi^5 k^4/45c^3 h^3) T^4 = (1/3) a T^4 \quad (2)$$

である。

さて、熱の輸送が輻射で行なわれる時、恒星内部の温度傾斜は

$$dP_r/dr = d\{(1/3)aT^4\}/dr = \kappa L(r)\rho/4\pi cr^2 \quad (3)$$

で与えられることを説明する。 $L(r)$ は半径 r の球面を通過して 1 秒間に流れる輻射エネルギーの量 (単位は erg) , κ は不透明度係数 **Coefficient of opacity** である。 κ の定義は, 1 cm^2 当たり質量 dm の薄層が, それに垂直に入射する輻射エネルギーの $\kappa \cdot dm$ 倍だけ吸収することで表わす (質量吸収係数) 。 (3)式を書き換え

$$-dP_r = \{L(r)/4\pi r^2\} \kappa \rho \cdot dr (1/c) \quad (4)$$

とすれば物理学的な意味がよくわかる。左辺は第 1 図の小体積 (半径 r の点で, 半径方向に置かれた面積 1 cm^2 , 厚み dr の薄い物体) の上下両面に垂直に働く輻射圧の差である。従って $-dP_r$ は輻射の流れによって, この小体積が受け取る運動量の割合である。 $L(r)$ は半径 r の球の全面を横切って, 毎秒流れる輻射エネルギーの量だから, $L(r)/4\pi r^2$ はその球面の単位面積当たりの流れの割合, 従って今考えている小体積を流れる割合である。小体積の質量は ρdr だから, κ の定義によって, 小体積に流れ込んだ輻射エネルギー $L(r)/4\pi r^2$ は, その $\kappa \rho \cdot dr$ 倍が吸収される。これによって小体積が受け取る運動量は, 吸収エネルギーを光速 c で割れば得られる。それが $-dP_r$ に等しいのである。

この説明は(4)式の物理学的な意味を明らかにするにはするけれども, 数学的に厳密にこの式を導くには, 理論物理学に基づいて, 各周波数に対する吸収係数

κ_ν が適当に定義できるという事実を認めねばならない. κ_ν の定義は, 面積 1 cm^2 当たり質量 dm の物質の薄層が, 周波数 $(\nu, \nu + d\nu)$ の輻射に曝された時, それが入射エネルギーの $\kappa_\nu dm$ 倍だけ吸収するということである. しかし, それを認める時は, κ が適当に定義された κ_ν の調和平均:

$$(1/\kappa) = \int_0^\infty [1/(\kappa_\nu \{1 - \exp(-h\nu/kT)\})] (dB_\nu/dT) d\nu / \int_0^\infty (dB_\nu/dT) d\nu \quad (5)$$

である場合に限り, 温度傾斜が(3)式の形で与えられることがわかる. これはいわゆるロスランド **Rosseland** の平均吸収係数である.

もし恒星の内部で輻射の吸収に与る物理過程がわかったならば, 量子論に従って, この過程の吸収断面積が求められ, それから得られるロスランド平均吸収係数を(1)式に代入すれば, 求めようとしている輻射過程による温度傾斜が得られるはずである. しかし, 恒星の不透明度 **opacity** の詳しい議論は後にして, ここでは(3)式で与えられる温度傾斜が温度の小変動に対して安定であるための条件を考えてみよう.

先ず便宜的に(1.3)式と(3)式を組合せ

$$dP_r/dP = \kappa L(r)/\{4\pi cGM(r)\} \quad (6)$$

を得る. ここでエネルギー遊離率の, 恒星全体としての平均 $\bar{\epsilon} = L/M$ と, 半径 r 以内での平均 $\overline{\epsilon(r)} = L(r)/M(r)$ との比を η とし

$$\eta = \{L(r)/M(r)\} \div (L/M) = \overline{\epsilon(r)}/\bar{\epsilon} \quad (7)$$

とすれば, (6)式は

$$dP_r/dP = L\kappa\eta/4\pi cGM \quad (8)$$

となる. この式を $r = r$ から $r = R$ まで積分し

$$\text{境界条件：恒星の表面 } r = R \text{ で } P = P_r = 0 \quad (9)$$

を用いると

$$P_r = L \overline{\kappa \eta(r)} P / 4\pi c G M \quad (10)$$

を得る。ここで

$$\overline{\kappa \eta(r)} = (1/P) \int_0^P \kappa \eta dP \quad (11)$$

は半径 r より外部における $\kappa \eta$ の、 P を荷重とした荷重平均値である。(8)式と(10)式を組み合わせると

$$(dT/T)_{\text{rad}} = (1/4)(dp_r/p_r) = (1/4)\{\kappa \eta(r)/\overline{\kappa \eta(r)}\}(dP/P) \quad (12)$$

を得る。

熱の輸送が輻射だけで行なわれている時は、常に(12)式の温度傾斜が成立っていなければならない。この輻射傾斜（輻射平衡の場合の温度傾斜）の安定性を調べるために、恒星の内部で最初、温度 T 、密度 ρ であった質量要素 δm が、突然温度増加 $\Delta T (> 0)$ をしたと仮定しよう。すると、この要素は、その周囲に対して、ある決まった量の圧力 $\delta P (> 0)$ を及ぼすだろう。それは膨張し、周囲より希薄になり、そのために浮力を生じて恒星の外方へ押し上げようとする力を受けることになる。問題は温度の小変動から起こるこのような物質の移動が、どの条件の下で減衰し、平衡が回復できるかである。この解答を出すには、その擾乱を生じた要素 δm の、その後の移動を追跡しなければならない。この変移要素 δm は運動につれて瞬間瞬間、常に周囲と圧力平衡を保つように膨張・収縮をすると考えられる。即ち周囲の物質からこの要素に及ぼされる圧力は、常にこの要素が周囲の物質に及ぼす圧力に等しいと考えられる。その上、

この圧力平衡は全く急速に起こるので、外部からその要素へ熱の伝達はそれほど生じないと考える。言い換えれば、この要素は移動の期間中、周囲の物質と圧力平衡を保つように断熱的に *adiabatically* 温度を変えるのだと考えられる。

さて、理想気体では準静的（可逆）断熱変化の場合、 γ を定圧比熱 C_p と定容比熱 C_v の比 $\gamma = C_p/C_v$ として

$$p_g V^\gamma = \text{constant} \quad (\text{ボアッソンの法則}) \quad (13)$$

の関係があり、また

$$TV^{\gamma-1} = \text{constant} \quad (14)$$

の関係がある。この両式から V を消去し、 γ として単原子気体 *Monatomic gas* の値 $\gamma = 5/3$ を用いれば、断熱過程の間に生ずる圧力・温度の増加には

$$(dT/T)_{ad} = 0.4(dp_g/p_g) \quad (15)$$

の関係がある。これを拡張して、輻射が存在する時にこの関係がどうなるかを調べるために、一般的に物質と輻射が共存する場合の断熱方程式を求めよう。

理想気体の状態の物質と輻射とが含まれる系の内部エネルギーは 1 g 当たり

$$U = aVT^4 + C_v T \quad (16)$$

ここで $aT^4 = (u)$ は輻射エネルギー密度、 $V (= 1/\rho)$ は物質 1 g 当たりの体積である。熱力学第 1 法則によって、この内部エネルギーの増加

$$dU = (\partial U / \partial T)_V dT + (\partial U / \partial V)_T dV$$

は、この系に与えられる熱量 dQ と、外部からこの系に対してなされる仕事 $W = -PdV$ の和に等しく

$$dU = dQ - PdV$$

である。従って断熱方程式($dQ = 0$)は

$$dQ = (\partial U/\partial T)_V dT + (\partial U/\partial V)_T dV + PdV = 0 \quad (17)$$

この場合 P は全圧力

$$P = p_r + p_g = (1/3)aT^4 + (C_p - C_v)(T/V) \quad (18)$$

理想気体では $C_p = C_v + k/\mu H$ の関係がある。

(16)式から U の微分を計算してみると

$$(\partial U/\partial T)_V = 4aVT^3 + C_v = (T/V)\{12p_r + p_g/(\gamma - 1)\} \quad (19)$$

$$(\partial U/\partial V)_T = aT^4 = 3p_r \quad (20)$$

(18)～(20)式を(17)式に代入すれば

$$\{12p_r + p_g/(\gamma - 1)\}(dT/T) = -(4p_r + p_g)(dV/V) \quad (21)$$

が得られる。(18)式の全微分を計算すれば

$$dP = (4p_r + p_g)(dT/T) - p_g(dV/V) \quad (22)$$

(21), (22)式は組合わせて parametric に P , V , T の中の2個の関係を表わしている。(130)式で定義した $\beta(= p_g/P)$ を用いて(21), (22)を表わすと

$$\{12(1 - \beta) + \beta/(\gamma - 1)\}(dT/T) = (4 - 3\beta)(d\rho/\rho) \quad (23)$$

$$dP/P = (4 - 3\beta)(dT/T) + \beta(d\rho/\rho) \quad (24)$$

但し $\rho = 1/V$ である。恒星の中で重要な $\gamma = 5/3$ では、(23)式は

$$dT/T = \{2(4 - 3\beta)/3(8 - 7\beta)\}(d\rho/\rho) \quad (25)$$

(24), (25)式から逐次 dT/T および $(d\rho/\rho)$ を消去すれば

$$dP/P = \{(32 - 24\beta - 3\beta^2)/3(8 - 7\beta)\}(d\rho/\rho) \quad (26)$$

$$dP/P = \{(32 - 24\beta - 3\beta^2)/2(4 - 3\beta)\}(dT/T) \quad (27)$$

従って、輻射が圧力や内部エネルギーに寄与する場合に(15)式に対応する式は

$$(dT/T)_{ad} = \{2(4 - 3\beta)/(32 - 24\beta - 3\beta^2)\}(dP/P) \quad (28)$$

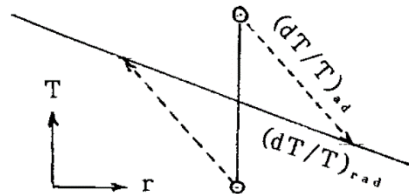
となる。もし輻射圧が無視できる時は $\beta = 1$ で、(28)式は(15)式に戻る。

さて、前の議論に戻り、その移動期間中、変移要素の温度は周囲とは異なった割合で変化することになる。この要素は周囲と圧力平衡にあると仮定しているから、もし

$$(dT/T)_{ad} > (dT/T)_{rad} \quad (29)$$

であれば、要素 δm はある距離だけ外方に移動した点で、その周囲と同じ温度・圧力・密度となる。要素は慣性のためその点を行き過ぎるかも知れないが、やがて周囲に溶け込み、とにかく最初の擾乱は衰える。

逆に最初、要素 δm が温度の低下を生じたとすれば、それは周囲より密度が高くなり、もっと高密度の領域へ沈下するだろう。もし要素がやは



り周囲と圧力平衡を保って断熱的に移動し、そして(29)式の条件が満たされていれば、その要素の物理的性質は間もなく周囲の物理的性質に等しい点に達するだろう。このような考察から次のように結論できる：

もし条件(29)が満たされるならば、輻射平衡は安定であって、対流は起こらない

(12), (28)式を用いて、安定の条件(29)式を書換えれば

$$\kappa\eta(r)/\overline{\kappa\eta(r)} \leq 8(4 - 3\beta)/(32 - 24\beta - 3\beta^2) \tag{30}$$

と表わすことができる。表には種々の β の値に対して(30)式の右辺の数値が示してある。輻射圧 p_r が無視できる重要な場合では $\beta = 1$ で、その条件は

$$\kappa\eta(r)/\overline{\kappa\eta(r)} \leq 1.6 \tag{31}$$

となる。

TABLE 14.4. THE CRITERION FOR THE STABILITY OF THE RADIATIVE GRADIENT

$1 - \beta$	$\{\kappa\eta(r)/\overline{\kappa\eta(r)}\}_{critical}$	$1 - \beta$	$\{\kappa\eta(r)/\overline{\kappa\eta(r)}\}_{critical}$
0	1.6	0.6	1.022
0.1	1.304	0.7	1.010
0.2	1.177	0.8	1.004
0.3	1.108	0.9	1.000
0.4	1.065	1.0	1.000
0.5	1.039		

さて、もし(31)の条件が破れたならば輻射傾斜は不安定になり、最初に何か擾乱が生ずると、それはますます助長され強まって衰えない。上昇流・下降流の系が起こって、それは存在する温度傾斜を（数値的に）小さくしようとする効果を持つことになる。そして最後には僅かな超断熱傾斜 Superadiabatic

gradient の特徴を持つ定常状態が実現するだろう。定常条件の時でも、このような状態で緩やかな超断熱傾斜が残存するのは、もしそれが無くなれば、熱を輸送すべき流れのための原動力が無くなってしまうからである。この最後に残される超断熱傾斜の大きさは非可逆的に遊離されるエネルギーの量で決まり、そのエネルギーは対流で運ばれなければならない。しかし対流の場合には、熱は物質そのものの移動で運ばれるので、必要な超断熱過剰 Superadiabatic excess は内部熱エネルギー U に対する遊離熱エネルギーの比で決まるだろうし、それが極端に小さい量であることは明らかである。例えば $\rho = 1$, $T = 10^7$ K で $U \sim 10^7 \text{ erg} \cdot \text{g}^{-1}$ であり、他方 $\varepsilon \sim 100 \text{ erg} \cdot \text{g}^{-1}$ である。従って断熱過剰は無視できほどごく小さい量になり、圧力・温度・密度間関係は、非常に良い精度で断熱方程式で与えられることになるだろう。対流平衡では圧力・密度との関係は、もし輻射圧 p_r が無視できる時は、ポアソン Poisson の法則(13)から

$$P = \text{const.} \rho^{5/3} \quad (32)$$

で与えられるが、輻射圧が無視できない時の圧力・密度の関係を求めてみよう。(1.31)式から

$$dP/P = -\{(4 - 3\beta)/3(1 - \beta)\}(d\beta/\beta) + (4/3)(d\rho/\rho) \quad (33)$$

この式と(26)式とから $d\rho/\rho$ を消去すると

$$dP/P = -\{(32 - 24\beta - 3\beta^2)/3\beta^2(1 - \beta)\} \cdot d\beta \quad (34)$$

積分すれば

$$P = \text{const.} e^{32/3\beta} (1 - \beta)^{5/3} \beta^{-8/3} \quad (35)$$

この式を(1.31)式に代入すれば

$$\rho = \text{const.} \{(1 - \beta)/\beta\} e^{8/\beta} \quad (36)$$

$$T = \text{const.} e^{8/3\beta} (1 - \beta)^{2/3} \beta^{-2/3} \quad (37)$$

が得られる。(35), (36), (37)式は理想単原子気体 ($\gamma = 5/3$) と輻射とを含む場合の断熱方程式の parametric 表現である。(35), (36), (37)式で $\beta = 1/(1 + y)$ と書くことにすれば

$$P = \text{const.} e^{32y/3} y^{5/3} (1 + y)$$

$$\rho = \text{const.} e^{8/y} y \quad (38)$$

$$T = \text{const.} e^{8y/3} y^{2/3}$$

と簡単な形で表わせる。

§ 4. 恒星の不透明度 Stellar opacity

前節で述べたことにより、輻射平衡条件における温度傾斜を与える式(3.3), (3.5)を用いるには、前以て恒星内部における不透明度 opacity の知識が必要である。

以前の推定から、恒星内部では大抵 $T = 10^6 \sim 2 \times 10^6$ K の範囲の温度を問題にすることを知った。この温度範囲に対するプランク Planck 曲線の（振動数 ν に対する）極大は $51.0 \sim 2.55 \text{ \AA}$ の間で変わる。従って恒星内部で扱うべき輻射の性質は軟 X 線ないしやや硬 X 線のものである。また殆どの元素は高度に電離し、多くて M 殻に数個の束縛電子を残すだけである。従って扱う恒星の内部は、M 殻まで電離してしまったイオンによる X 線の吸収・放出の機構である。実験室での X 線の実験から次のようなことがわかっている。X 線領域での吸収の主な機構は

1. 原子核に束縛されている電子の光電電離（束縛—自由遷移）
2. 帯電したイオンや原子核の静電場での自由電子の加速（自由—自由遷移）
3. 自由電子によるトムソン—コムトン Thomson-Compton 散乱

である。これらの 3 機構の中、(1)が最も重要だが、(3)も他の吸収機構が有効でなくなった場合には無視できない機構となる。

先ず光電子の脱出による吸収過程(1)を考えると、これは電離ポテンシャルより大きいエネルギーの光量子に対してだけ有効である。従って電離ポテンシャルを $\chi^{(n)}$ で表わせば、この原子の光電電離による吸収は、振動数

$$\nu \geq \chi^{(n)}/h \quad (1)$$

に対してのみ可能である。量子論によれば、この極限より大きい振動数に対する吸収係数はほぼ近似的に ν^{-3} で減少する。特に核荷電 Ze の主量子数 n の状態にある電子を持つ原子は、振動数りの輻射束から輻射エネルギーを

$$\alpha_0(\nu; Z, n) = (64\pi^4/3 \cdot 3^{1/2})(Z^4 m e^{10}/c h^6)(1/n^5)(1/\nu^3) \quad (\nu \geq \nu_n = \chi^{(n)}/h) \quad (2)$$

の割合で吸収することが理論的に予想される。これに更に自由-自由遷移、即ち荷電 Ze のクーロン **Coulomb** 場における自由電子の加速によって生ずる吸収 (2) を加えなければならない。これは 1 cm^3 当たりの自由電子の数 N_e とその速度分布によって決まる。速度分布が温度 T のマクスウェル **Haxwell** 分布で与えられると仮定すれば

$$\alpha_0(\nu; Z, \infty) = (16\pi^2/3 \cdot 3^{1/2})\{Z^2 e^6/hc(2\pi m)^{3/2}\}\{N_e/(kT)^{1/2}\}(1/\nu^3) \quad (3)$$

を得る。

任意に与えられた組成、ある温度・電子圧の値に対して、吸収係数 κ_ν の計算は原理的には簡単である。先ず与えられた温度・電子圧を用いて統計力学 (サハ **Saha** の公式、ボルツマン **Boltzman** の公式) によって、与えられた原子の種々の電離状態・励起状態の分布を決定する。種々の異なる原子の電離ポテンシャルを大きいものから順に (各電離状態について適当に幾つかの励起状態を考慮して) 並べ、(2), (3)式によって吸収係数 κ_ν を

$$\kappa_\nu = D/\nu^3 \quad (4)$$

の形で表わせる。ここで D は階段関数 **step function** で、1 つの吸収端を過ぎると常に不連続に増加し、2 つの相次ぐ吸収端の間では一定である。即ち

$$D(\nu) = D(\nu_i, \nu_{i+1}) = \text{const.} \quad (\nu_i < \nu < \nu_{i+1}) \quad (5)$$

これに対応するロスランド **Rosseland** の平均吸収は(3.5)により

$$1/\kappa = [\sum_i \{A_1 \times A_2\}]/A_3 \quad (6)$$

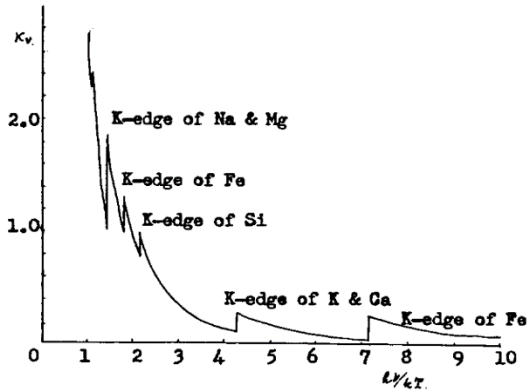
但し

$$A_1 = \{1/D(v_i \cdot v_{i+1})\}$$

$$A_2 = \int_{v_i}^{v_{i+1}} [v^3 / \{1 - \exp(-hv/kT)\}] (dB_v/dT) dv$$

$$A_3 = \int_0^\infty (dB_v/dT) dv$$

で与えられる。この方法で種々な元素組成に対する吸収係数がストロームグレン B. Stroemgren, P. H. Morse, Marjorie H. Harrison 等によって計算されている。しかし、それらの計算結果を示す前に、結果がどの程度に仮定された化学組成に依存し敏感であるかを調べる。



先ず水素 H およびヘリウム He はそれほど不透明度に関係しない。それは、恒星内部の温度でそれらは陽子および α 粒子の形になっており、自由-自由遷移でしか吸収に参加できないからであり、また吸収係数が Z^2 に比例するからである。束縛-自由遷移の可能性がある場合には、自由-自由遷移はそれに比べて常に非常に小さいのである。

第二に、ある特定の元素による吸収を考える時、これから起ころうとする電離状態・励起状態のみが最も有効である。言い換えれば電離ポテンシャルがドミナント・ポテンシャル Dominant potential ψ に近いような原子・イオンだけを扱うことになる。従って ψ がその元素の最後の K 殻電離ポテンシャルよりずつ

と大きければ、この元素はもはや吸収には与らない。

さて任意の Dominant potential ψ に対して、異なる元素は異なる準位にまで電離するが、生じたイオンの更に次の電離ポテンシャルは、どの元素についてもほぼ同じであり、従って種々の元素の有効荷電もほぼ同じである。もしある特定の元素が ψ より相当小さい K 殻電離ポテンシャルを持っているとすれば、即ちエディントン Eddington の言葉を借りれば、《最後のギロチン guillotine》がその元素に落ちてしまえば、この規則には例外が起こる。従って任意の温度・密度における平均吸収係数は主として $\kappa^{(K)} \sim \psi$ である元素の相対量に敏感である。温度 2×10^7 K 程度では、比較的相対量の多い元素の中で最後の電離ポテンシャルが 871.39 eV である酸素だけが、ギロチンの落ちつつある厄介な状態にある。従って水素とヘリウムを除けば、特に相対量を知らねばならない元素は酸素だけである。問題にしている温度領域では、他の重元素の相対量は不透明度計算に全く入ってこないと言える。やがてわかるように、詳しい計算をしてみれば、これがわかる。大抵の計算では重元素の相対量としてラッセル混合 Russell-mixture を便宜的に採用する。それは重量比で

$$\text{Fe: Ca + K: Si: Na + Mg: O} = 0.125: 0.0625: 0.0625: 0.25: 0.5$$

の割合である。上記の注意によって、もっと低い温度ではそれほど問題にはならないのに、 2×10^7 K 程度の温度では、得られる不透明度が仮定する酸素の相対量に敏感であろうということがわかる。

さて、詳細な計算の結果を示す。今まで発表された中で最も精密なのは Morse のものである。Morse は Rosseland 平均吸収に対する最後の公式を次の形で書いている:

$$\kappa = 7.23 \times 10^{24} [\sum_{Z>2} (x_z Z^2 / A_z)] (1 + X)(1 - X - Y) (\rho / \tau T^{3.5}) \quad (7)$$

ここで、 x_z は原子番号 Z 、原子量 A_z の元素の重量による相対量、 X 、 Y はそれぞれ水素とヘリウムの相対量、 τ は ρ 、 T および厳密に言えば仮定した化学組

成によって決まる因子である。τ は時にギロチン因子 **Guillotine factor** と呼ばれる。Morse と Harrison は種々の温度、密度、および幾つかの混合比に対してギロチン因子 τ を表にしている。

(7)式における(1 + X)と(1 - X - Y)の因子は、κ が電子密度 N_e に比例し N_e がまた(1 + X)に比例するということ(2.17)，および不透明度に水素とヘリウムが関係しない、即ち(1 - X - Y)に比例することによって入ってきている。

種々の温度・密度に対して、またラッセル混合および

$$\text{Fe: Ca + K: Si: Na + Mg: O} = 0.3: 0.05: 0.05: 0.2: 0.4$$

という混合に対して、Morse が得たτ の値が表 14.5，表 14.6 に与えてあり，図 14.3，図 14.4 に示してある。

表 14.5，表 14.6 のデータを見れば，酸素を多く持っているラッセル混合では比較的高温に対しては一様にτ が大きい（即ちκ が小さい）が，比較的低温（ $T \sim 10^6$ K）では系統的な相異がないという特徴がわかる。

太陽に対して得られる範囲の温度・密度ではMorse の結果から，ギロチン因子 τ が $\rho^{0.25}$ に比例して変わることがわかり，十分な精度で

$$\kappa = 10^{25}(1 + X)(1 - X - Y)\rho^{0.75}T^{-3.5} \quad (8)$$

と書くことができる。これはSchwarschild の得た近似である。

3×10^7 K以上の温度に対しては，光電電離による不透明度は非常に急激に減少し，吸収の主要な機構としては電子散乱だけが残る。われわれは実際硬 γ 線領域を扱うわけではないから，この過程に対して波長に無関係なトムソン Thomson 散乱係数，即ち 1 自由電子当たり

$$\sigma_e = 8\pi e^4/3m^2c^4 \quad (9)$$

を用いることができる。これに対応する不透明度係数は

$$\kappa = 0.20(1 + X)$$

(10)

であり、これが $(1 + X)$ に比例するのは、 κ が電子密度 N_e に比例することによる。(2.17)式を参照せよ。

TABLE 14.5. VALUES OF THE LOGARITHM OF THE GUILLOTINE FACTOR $\log_{10} \tau$ FOR THE RUSSELL MIXTURE
 $(c(Fe) = 0.125, c(K, Ca) = c(Si) = 0.0625, c(Na, Mg) = 0.25, c(O) = 0.5)$

log T	$\log \rho(1 + X)$												
	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
5.6	0.10	0.28	0.56	0.88	1.23	1.62	2.02	2.46	2.92	3.43	3.98	4.55	5.14
5.7	0.09	0.17	0.44	0.76	1.09	1.48	1.90	2.34	2.80	3.30	3.83	4.41	5.00
5.8	0.13	0.17	0.36	0.67	1.01	1.38	1.78	2.21	2.66	3.16	3.69	4.27	4.86
5.9	0.23	0.27	0.38	0.65	0.98	1.30	1.68	2.09	2.54	3.03	3.56	4.13	4.72
6.0	0.32	0.35	0.42	0.63	0.92	1.22	1.58	1.98	2.41	2.90	3.42	4.00	4.58
6.1	0.27	0.30	0.35	0.55	0.81	1.12	1.47	1.85	2.27	2.76	3.28	3.86	4.44
6.2	0.21	0.23	0.28	0.45	0.69	0.98	1.32	1.71	2.13	2.61	3.14	3.72	4.30
6.3	0.20	0.22	0.26	0.37	0.56	0.84	1.18	1.57	2.00	2.47	3.00	3.58	4.16
6.4	0.17	0.19	0.22	0.28	0.42	0.70	1.04	1.43	1.85	2.33	2.86	3.44	4.02
6.5	0.11	0.13	0.15	0.20	0.32	0.58	0.92	1.28	1.71	2.19	2.72	3.30	3.88
6.6	0.10	0.12	0.14	0.19	0.28	0.50	0.81	1.17	1.58	2.05	2.58	3.16	3.74
6.7	0.13	0.15	0.17	0.21	0.28	0.45	0.72	1.07	1.47	1.92	2.44	3.02	3.60
6.8	0.22	0.23	0.25	0.27	0.33	0.47	0.70	1.01	1.38	1.82	2.32	2.88	3.46
6.9	0.31	0.32	0.34	0.37	0.43	0.53	0.72	0.99	1.32	1.73	2.21	2.75	3.32
7.0	0.41	0.42	0.45	0.49	0.54	0.62	0.77	1.00	1.30	1.67	2.11	2.63	3.19
7.1	0.49	0.50	0.52	0.54	0.58	0.65	0.77	0.98	1.25	1.61	2.02	2.52	3.07
7.2	0.56	0.56	0.57	0.58	0.60	0.64	0.73	0.92	1.18	1.52	1.93	2.42	2.95
7.3	0.63	0.63	0.64	0.65	0.67	0.69	0.74	0.87	1.06	1.41	1.83	2.32	2.84
7.4	0.75	0.75	0.75	0.76	0.77	0.79	0.83	0.91	1.05	1.36	1.76	2.25	2.74
7.5	0.90	0.90	0.90	0.91	0.93	0.95	0.98	1.04	1.16	1.40	1.75	2.19	2.66
7.6	1.10	1.10	1.10	1.10	1.11	1.13	1.16	1.21	1.31	1.53	1.82	2.19	2.61
7.7	1.33	1.33	1.33	1.33	1.34	1.36	1.38	1.42	1.52	1.69	1.93	2.23	2.58
7.8	1.59	1.59	1.59	1.59	1.59	1.60	1.62	1.66	1.73	1.86	2.04	2.29	2.58
7.9	1.81	1.81	1.81	1.81	1.81	1.82	1.83	1.85	1.90	2.00	2.14	2.35	2.69
8.0	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.01	2.03	2.06	2.12	2.24	2.41	2.62
8.1	2.14	2.14	2.14	2.14	2.14	2.14	2.14	2.16	2.18	2.23	2.33	2.46	2.65
8.2	2.27	2.27	2.27	2.27	2.27	2.27	2.27	2.28	2.29	2.34	2.41	2.52	2.68
8.3	2.36	2.36	2.36	2.36	2.36	2.36	2.36	2.37	2.41	2.47	2.56	2.71	
8.4	2.44	2.44	2.44	2.44	2.44	2.44	2.44	2.45	2.47	2.52	2.60	2.74	

TABLE 14.6. VALUES OF THE LOGARITHM OF THE GUILLOTINE FACTOR $\log_{10} \tau$
 $[c(Fe) = 0.3, c(K, Ca) = c(Si) = 0.05, c(Na, Mg) = 0.2, c(O) = 0.4]$

log T	$\log \rho(1 + X)$												
	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
5.6	0.13	0.31	0.59	0.91	1.25	1.64	2.03	2.46	2.92	3.43	3.97	4.55	5.14
5.7	0.09	0.18	0.45	0.77	1.11	1.50	1.91	2.33	2.79	3.29	3.83	4.41	5.00
5.8	0.09	0.13	0.36	0.68	1.03	1.40	1.79	2.21	2.66	3.16	3.69	4.27	4.86
5.9	0.20	0.24	0.41	0.67	0.99	1.32	1.69	2.10	2.53	3.03	3.55	4.13	4.72
6.0	0.36	0.40	0.48	0.69	0.97	1.26	1.61	1.99	2.41	2.90	3.42	4.00	4.58
6.1	0.35	0.38	0.45	0.66	0.93	1.19	1.52	1.87	2.28	2.76	3.28	3.86	4.44
6.2	0.26	0.29	0.36	0.55	0.81	1.09	1.41	1.76	2.15	2.62	3.14	3.72	4.30
6.3	0.16	0.19	0.25	0.40	0.63	0.94	1.28	1.64	2.03	2.48	3.00	3.58	4.16
6.4	0.07	0.10	0.15	0.25	0.45	0.77	1.12	1.50	1.90	2.35	2.87	3.44	4.02
6.5	0.01	0.02	0.05	0.14	0.30	0.61	0.96	1.36	1.76	2.22	2.74	3.30	3.88
6.6	0.02	0.02	0.04	0.10	0.23	0.48	0.82	1.21	1.63	2.08	2.59	3.16	3.74
6.7	0.12	0.12	0.13	0.15	0.24	0.41	0.72	1.09	1.51	1.95	2.46	3.02	3.60
6.8	0.24	0.24	0.24	0.25	0.30	0.44	0.69	1.03	1.41	1.84	2.32	2.88	3.46
6.9	0.35	0.36	0.38	0.40	0.43	0.52	0.71	1.01	1.33	1.74	2.21	2.76	3.33
7.0	0.44	0.45	0.48	0.51	0.55	0.62	0.77	1.00	1.29	1.66	2.10	2.63	3.19
7.1	0.50	0.52	0.55	0.58	0.62	0.69	0.80	0.99	1.24	1.56	1.97	2.49	3.06
7.2	0.54	0.56	0.59	0.63	0.66	0.70	0.77	0.93	1.15	1.44	1.84	2.36	2.93
7.3	0.61	0.62	0.64	0.66	0.68	0.69	0.71	0.82	1.00	1.30	1.72	2.23	2.79
7.4	0.74	0.73	0.72	0.71	0.70	0.69	0.67	0.72	0.85	1.17	1.60	2.12	2.67
7.5	0.90	0.86	0.82	0.78	0.75	0.71	0.71	0.75	0.89	1.16	1.56	2.04	2.57
7.6	1.07	1.03	0.98	0.92	0.88	0.86	0.88	0.93	1.05	1.30	1.62	2.03	2.50
7.7	1.30	1.27	1.24	1.20	1.16	1.14	1.14	1.18	1.29	1.50	1.74	2.07	2.46
7.8	1.52	1.51	1.49	1.46	1.43	1.41	1.40	1.44	1.51	1.66	1.86	2.13	2.46
7.9	1.73	1.71	1.71	1.70	1.69	1.67	1.67	1.69	1.73	1.82	1.98	2.20	2.48
8.0	1.90	1.90	1.90	1.90	1.89	1.87	1.87	1.88	1.90	1.96	2.09	2.28	2.51
8.1	2.04	2.04	2.04	2.04	2.03	2.03	2.02	2.03	2.05	2.10	2.20	2.35	2.55
8.2	2.15	2.15	2.15	2.15	2.15	2.14	2.13	2.14	2.16	2.21	2.29	2.41	2.59
8.3	2.24	2.24	2.24	2.24	2.24	2.23	2.23	2.24	2.25	2.28	2.36	2.47	2.63
8.4	2.32	2.32	2.32	2.32	2.32	2.32	2.32	2.34	2.35	2.36	2.42	2.51	2.66

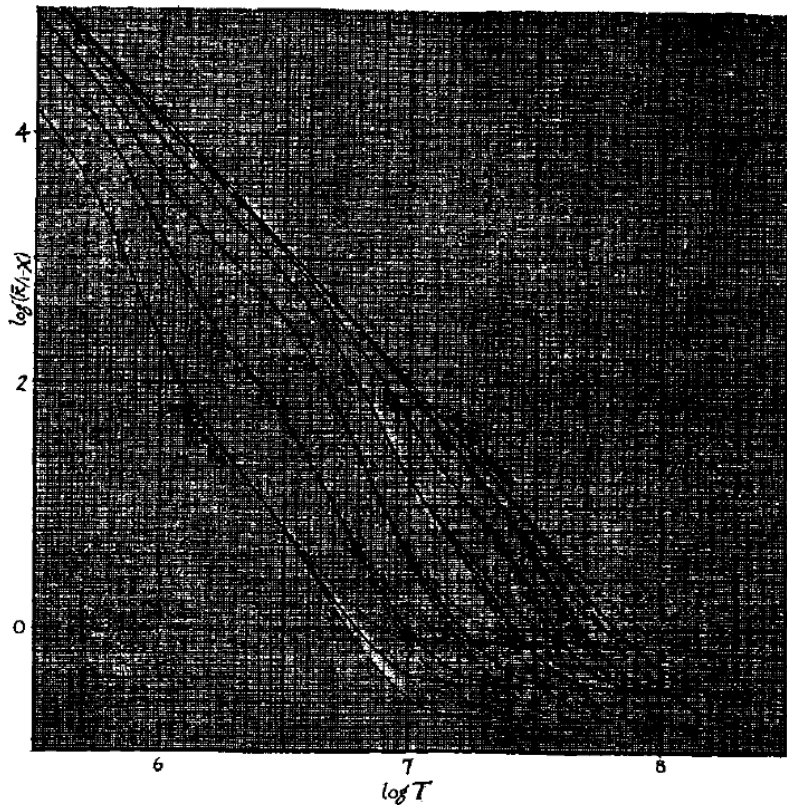


FIG. 14.3. Average opacity $\bar{\kappa}$ for the Russell mixture diluted with hydrogen, as a function of temperature for different densities. The dotted lines are for the mixture diluted with 60 per cent hydrogen; the solid line, for $X = 0.30$; the dashed line, for no hydrogen.

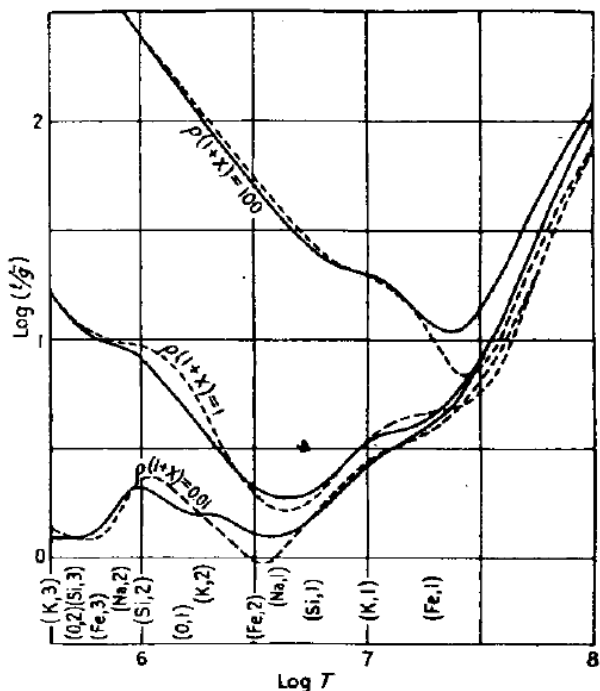


FIG. 14.4. Values of the guillotine factor t as function of T for three different values of ξ , and for two different mixtures of heavy elements. The solid line is for the Russell mixture (Table 14.5); and the dotted line for the case in Table 14.6. Below the curves the different bound states are noted at the temperatures where the absorption due to this state is the most important part of the opacity.

§ 5. 理論的質量—光度—半径関係および主系列星に対する恒星モデル

これまで述べた物理的な基礎に基づいて、平衡方程式から恒星の質量・光度・半径・化学組成の間の一つの関係が導ける．先ず全圧力 P の中で輻射圧 p_r の占める割合が無視できるような $M \leq 3M_{\odot}$ の恒星（§1 を見よ）に限定しよう．平衡方程式を次の形で書く．

$$(1.3) : (k/\mu H) \cdot d(\rho T)/dr = -GM(r)\rho/r^2 \quad (1)$$

$$(1.4) : (dM(r))/dr = 4\pi r^2 \rho \quad (2)$$

$$(3.3) : dT/dr = (3\kappa\rho/16\pi acr^2T^3) \cdot L(r) \quad (3)$$

輻射温度傾斜を与える(3)式は§3で議論した意味において“安定な”場合にだけ成立つ．その議論によれば、輻射傾斜はそれが断熱傾斜に等しくなる時にちょうど安定でなくなる．全圧力 P に対して輻射圧 p_r が無視できる時（ $\beta = 1$ ），断熱的な P と ρ との関係は(3.24)により

$$dP/P = \{1 + (2/3)\} \cdot d\rho/\rho \quad (4)$$

で与えられるが、一般的に

$$dP/P = \{1 + (1/n_{\text{eff}})\} \cdot d\rho/\rho \quad (5)$$

と書くことにすれば、輻射傾斜の安定性に対する条件は次のように表現できる

輻射傾斜は、有効ポリトロップ指数 **effective polytropic index** n_{eff} が 1.5 より大きい（ $n_{\text{eff}} > 1.5$ ）限り安定である

ちょうど $n_{\text{eff}} = 1.5$ になる時に安定ではなくなり、この時から対流平衡が始まり、(3)式の代わりに圧力・密度の関係

$$(3.30) : P = \text{const} \cdot \rho^{5/3} \quad (6)$$

を用いなければならない。

さて(3)式は前以て κ と $L(r)$ がわかっていなければならない。 κ については§4で(4.7)式を用いるのにギロチン因子 τ を

$$\tau = \tau_0 \rho^\alpha \quad (7)$$

の冪の形で表わすと便利なことを示しておいた（太陽では $\alpha \sim 0.25$ ）。すると

$$\kappa = \kappa_0 \rho^{1-\alpha} T^{-3.5} \quad (8)$$

と書ける。ここで κ_0 は

$$\kappa_0 = (7.23 \times 10^{24} / \tau_0) [\sum_{Z>2} (x_Z Z^2 / A_Z)] (1 + X)(1 - X - Y) \quad (9)$$

を表わしており，恒星内部で組成がずっと一様であれば κ_0 は定数である。(8)式の形の κ を用いると，輻射温度傾斜(3)式は

$$dT/dr = -\{3\kappa_0 L(r) / 16\pi a c\} \cdot (\rho^{2-\alpha} / r^2 T^{6.5}) \quad (10)$$

となる。さらに恒星の内部における $L(r)$ の知識が必要である。今，恒星の中心から距離 r における条件で，物質1 gr当たり（非可逆的に）毎秒エネルギーを生成する割合を $\varepsilon(r)$ とすれば

$$dL(r)/dr = 4\pi r^2 \rho \varepsilon(r) \quad (11)$$

従って以下の理論では $\varepsilon(r)$ についての何らかの仮定に依存する。 $\varepsilon(r)$ に関しては，次の節で恒星のエネルギー源に戻るが，ここでの理論の進展には必ずしも $L(r)$ ， $\varepsilon(r)$ の正確な知識がなくてもよいことに注意するのが重要である。事実，多くの重要な結論は $L(r)$ の正確な知識がなくても得られるし，また歴史

的に見ても Eddington が質量—光度関係を得た当時はまだ原子核エネルギー源の知識は完全ではなかった。その理由は、エネルギー源の正確な分布が未知であるとしても、 $\varepsilon(r)$ が r とともに徐々に減少する関数であることは明らかであり、現実の分布が2つの両極端

$$\varepsilon(r) = \bar{\varepsilon} = \text{const.} \quad (12)$$

$$\varepsilon(r) = 0 \quad (\text{for } r \neq 0) \quad (13)$$

の間にあると考えることができるからである。この両極端はエネルギー源についての、それぞれ一様モデル Uniform model, 点源モデル Point source model を表わしている。さて、これらの何れの場合についても（そして、更に一般的に $\varepsilon \propto \rho^a T^b$ の形で表わされる場合に対しても）

$$\kappa_0 L = \text{const} \{M^{5.5+\alpha}/R^{0.5+3\alpha}\} \cdot \mu^{7.5} \quad (14)$$

の形の積分が得られることが証明できる。先ず点源モデルについて、この関係を求め、一様モデルについては後で考える。何れについても(14)の形となるが、式中の比例定数 const はモデルによって異なることに注意しなければならない。しかし、その違いはそれほど大きいものではなく、例えば $\alpha = 0$ の場合、比例定数は一様モデルの方が点源モデルの 2.6 倍になるだけである。従って結果の関係の不確かさはそう大きくはなく、この不確かさを最小に留めるような進んだ考察ができる。

輻射傾斜の安定に対する条件(3.31)

$$\{\kappa\eta(r)/\overline{\kappa\eta(r)}\} < 1.6 \quad (15)$$

により、点源モデルでは内部のある決まった点で輻射傾斜が不安定になる。何故なら、この場合 $L(r) = L$ だから

$$r \rightarrow 0 \text{ で } \eta = \{L(r)/M(r)\}/\{L/M\} = M/M(r) \rightarrow \infty \quad (16)$$

となり、(15)の条件は必ず破れるからである。従って点源モデルは、必ず対流平衡にある中心核を持たねばならない。対流核の内部ではエネルギー源の精確な分布は(近似的な)断熱傾斜の維持には、それほど問題にならない。それによってただ小さい超断熱過剰の量が決まるだけである。従って、恒星の構造を一見何ら変更しないで対流核内のエネルギー源を、かなり広い任意的な方法で再分布することもできる。従って(13)の条件をもっと緩めて

$$\varepsilon(r) = 0 \quad (r > r_i \text{ に対して}) \quad (17)$$

と置き換えてもよいわけである。ここで r_i は対流核の半径を示しており、点源モデルの特徴は不変のまま保たれている。後に判るように不透明度の法則(8)で作られた点源モデルは恒星の全質量の9~15%を含む対流核を持つことになる。従って点源モデルの関係式が成立するためには、エネルギー源が中心部の質量10~15%の領域に限定されているということだけが要求されるのである。

現在、原子核反応が恒星の主要なエネルギー源であることが判っている。何故そう考えられるかという根拠については後に述べるが、ここでそれを持ち出した理由は、それらの原子核反応が温度に非常に敏感で、恒星の質量の10%を占める中心部が実際にエネルギーの殆ど全部を生成していると考えられるからである。こう考えてくると、点源モデルこそは他の如何なるモデルよりも恒星の構造の考察に最適な出発点となることが判る。

最後に、化学組成について恒星の内部全体にわたって一様性か、あるいは幾つかの仮定をしなければならない。これについては後に述べるが、差当って恒星の内部を通じて X , Y , μ が一定であると仮定しておこう。

$L(r) = L$ の場合の(10), (1), (2)は Schwarzschild の行なったように、無元変数 non-dimensional variables を使って変換すれば

$$\begin{aligned} P &= (p/4\pi) \cdot (GM^2/R^4), \quad T = t(\mu H/k) \cdot (GM/R), \\ M(r) &= qM, \quad r = xR \end{aligned} \quad (18)$$

を用いて、それぞれの式は

$$dp/dx = -pq/tx^2, \quad dq/dx = px^2/t \quad (19)$$

および

$$dt/dx = -C \cdot \{p^{2-\alpha}/x^2 t^{8.5-\alpha}\} \quad (\text{輻射平衡の場合}) \quad (20)$$

となる。ここで C は

$$\begin{aligned} C &= C(\alpha) \\ &= \{3\kappa_0/4(4\pi)^{3-\alpha}ac\}(k/GH)^{7.5}\{LR^{0.5-3\alpha}/M^{5.5+\alpha}\mu^{7.5}\} \end{aligned} \quad (21)$$

であるが、 L , M , R を太陽単位で表わして対数をとれば

$$\log C = -30.725 + 0.3276\alpha + \log \kappa_0 + \log(LR^{0.5-3\alpha}/M^{5.5+\alpha}\mu^{7.5}) \quad (22)$$

となる。

(19), (20)の解が満たすべき境界条件は、恒星の境界即ち $r = R$, $M(r) = M$ において圧力も温度も0になる、 $P = T = 0$ という事実に応じて

$$p = t = 0, \quad q = 1 \quad (\text{at } x = 1) \quad (23)$$

である。

さて任意の C の値に対して、恒星の表面 $x = 1$ における境界条件(23)を満たすような(19), (20)の解はただ一つだけ存在する。しかし、その解は一般には恒星の中心 $x = 0$ における条件を満たしてはおらず、これを満たすものを選び出せば C が決定できる。このことは重要な結果であって、以下の議論の多くはそれに関連がある。

任意に与えられた C に対して、境界条件(23)を満たすような(19), (20)の解、

即ち恒星の境界近く ($x \rightarrow 1$) における圧力と温度の様子を調べてみよう.

$x = 1$ 近くの解を考える時, (19)式の dp/dx の式中で $q \equiv 1$ で置き換えてもそれ程大きい誤差は生じない. 何故ならすぐ判るように恒星の表面近くの密度は非常に緩やかにしか増加しないので, この領域における平衡式の積分で $M(r)$ と M との差は無視できるからである. 従って $x = 1$ 近くでは $q = 1$ と置き

$$dp/dx = -p/tx^2, \quad dt/dx = -C \cdot \{p^{2-\alpha}/x^2 t^{8.5-\alpha}\} \quad (\text{for } x = 1) \quad (24)$$

両式で割算をして

$$dp/dt = t^{7.5-\alpha}/Cp^{1-\alpha} \quad (25)$$

これは容易に積分できて, p と t が同時に0となるという境界条件(23)によって積分定数も決定すれば, 積分の結果は

$$p^{2-\alpha} = \{(2-\alpha)/C(8.5-\alpha)\}t^{8.5-\alpha} \quad (26)$$

これを(24)の dt/dx に代入すれば

$$dt/dx = -\{(2-\alpha)/(8.5-\alpha)\} \cdot (1/x^2) \quad (27)$$

われわれの条件 ($x = 1$ で $t = 0$) を満たすこの式の解は

$$t = \{(2-\alpha)/(8.5-\alpha)\} \cdot \{1 - (1/x)\} \quad (28)$$

これに対応する密度の解は (輻射圧を無視して), $\rho = \mu HP/kT$ に変数変換 (18)を用い

$$\rho = \{M/4\pi R^3\} \cdot (p/t) \quad (29)$$

で与えられ, (26), (28), (29)で解が得られた. 輻射平衡の部分のポリトロープ指数を求めるには, (26), (29)から

$$\begin{aligned} dp/p &= \{(8.5 - \alpha)/(2 - \alpha)\} \cdot (dt/t) \quad (= dP/P) \\ d\rho/\rho &= (dp/p) - (dt/t) \end{aligned}$$

であるから両式で dt/t を消去すれば(5)式の形となり, ポリトロープ指数は

$$n_{\text{eff}} = \{(8.5 - \alpha)/(2 - \alpha)\} - 1 = 6.5/(2 - \alpha) \quad (x \rightarrow 1) \quad (30)$$

の値で始まることになる. われわれが問題にしようとしている α の範囲(太陽に対して $\alpha \sim 0.25$)に対して, これは1.5より大きく, 恒星の外層部では輻射平衡が安定である.

解(26), (28), (29)は勿論, 境界 $x = 1$ の近くでだけ成立するのであるが, 標準法 Standard method によって内方へと接続して行ける. そして解に沿って内方に進んで行くと, 有効ポリトロープ指数 n_{eff} は次第に減少し, ある一定の点, 例えば $x = x_i$ で $n_{\text{eff}} = 1.5$ となる. これが起これると輻射平衡は破れて対流平衡が始まり, 輻射平衡式(20)は使えず, この代わりに(6)から得られる

$$p/p_i = (t/t_i)^{2.5} \quad (31)$$

を(19)式と組み合わせて基本式としなければならない. ここで p_i , t_i は $n_{\text{eff}} = 1.5$ となる点 $x = x_i$ における p , t の値である. 従って x_i より内部の平衡方程式は

$$(d/dx)t^{2.5} = -(q/x^2)t^{1.5}, \quad dq/dx = (p_i/t_i^{2.5})t^{1.5}x^2 \quad (32)$$

あるいは

$$2.5(dt/dx) = -(q/x^2), \quad (1/x^2)(dq/dx) = (p_i/t_i^{2.5})t^{1.5} \quad (33)$$

となる. これらを用いて, 解は $x < x_i$ に対して継続される. そして明らかに

恒星の中心 $x \rightarrow 0$ に近付く時、質量 $q \rightarrow 0$ になることが必要である。一般に、即ち任意に定めた C の初期値で出発すれば、この要件が満たせない。そして、この要求が満たされねばならないという恒星の中心における境界条件によって C が決まってくる。以上のようにして、何故ある決まった C の値に対してのみ、 $x = 1$ および $x = 0$ の両方における境界条件を満たすような解がただ一つだけ存在するかということが判る。

この解を用いることによって、質量 M 、半径 R の与えられた恒星に対して内部の任意の点における圧力・密度・温度が(18)式で得られる。しかし、ここでの議論の最も重要な結果は、質量・光度・半径の関係が得られたことである。というのは C が決定できる定数であるから(21)式は

$$L = \{4(4\pi)^{3-\alpha} ac / 3\kappa_0 C\} (GH/k)^{7.5} (M^{5.5+\alpha} / R^{0.5+\alpha}) \mu^{7.5} \quad (34)$$

と書けるからである。

$\alpha = 0$: Cowling によって最初に考察された Cowling model

$\alpha = 0.25$: Schwarzschild によって積分されたもので太陽に対応

$\alpha = 0.375, 0.500, 0.550, 0.600, 0.625$: Williamson & Duff によって研究された。これらの積分結果は表 7, 表 8 に示されており、図 5, 図 6 に描かれている。2 つの代表的な恒星、太陽とシリウス A (Sirius A) に対してこれらのモデルから予想される中心密度 ρ_c 、中心温度 T_c などが表 9 に示されている。

κ_0 および μ は何れも水素、ヘリウムの相対量 X, Y で表わせるので [κ_0 (§ 5.9), μ (§ 2.15) 参照] 上の(34)式は恒星の質量 M 、光度 L 、半径 R および水素・ヘリウムの相対量 X, Y の間の関係式であることになる。従って L, M, R の知られている恒星に対して(34)式は水素とヘリウムの相対量 X, Y の間の関係式を与える。この問題については後に考える。

さて議論を完全にするために、エネルギー源の一樣モデルに対して(14)式を求めてみよう。もし適度の質量の恒星に限定すれば dP/dr の式中で輻射圧 p_r の項が無視でき、この場合、不透明度の法則やエネルギー生成の法則が著しく変わっても、質量、光度、半径の関係は、形が殆ど変わらないことを述べてお

いた。正確に言えば静流体力学平衡式の中の p_r 項が無視できれば、 $\kappa \propto \rho^c T^d$ で変わる不透明度法則に対して点源モデルでも一様源モデルでも、同じ形の質量、光度、半径の関係がえられることが証明できる。何故こうなるかは興味深いことである。この目的のために、不透明度法則が(8)式の形をしている場合を考える。

エネルギー源が恒星内部で一様に分布している時

$$L(r) = (L/M)M(r) \quad (35)$$

であり、変数変換(18)を行なえば平衡方程式は(19), (20)に対応して

$$\begin{aligned} (dp/dx) &= -(pq/tx^2) ; & (dq/dx) &= px^2/t \\ (dt/dx) &= -C(p^{2-\alpha}/x^2 t^{8.5-\alpha})q \end{aligned} \quad (36)$$

ここで定数 C は(21)式と同じ意味を持っている。 dp/dx の式と dt/dx の式で割算をすれば

$$(dp/dt) = (t^{7.5-\alpha}/Cp^{1-\alpha}) \quad (37)$$

を得るが、この式を見ると点源モデルの場合に、境界近く ($x \rightarrow 1$) で成立する式として得られた(25)式と同じである。従って(26)と同じ関係

$$p^{2-\alpha} = \{(2-\alpha)/C(8.5-\alpha)\}t^{8.5-\alpha} \quad (38)$$

が今度の問題では ($x \rightarrow 1$) に限定されることなく正しい積分となる。 p と t がこのように関係していると、平衡方程式(36)は

$$(dt/dx) = -C\{(2-\alpha)/(8.5-\alpha)\}(q/x^2) \quad (39)$$

および

$$(dq/dx) = \{(2-\alpha)/C(8.5-\alpha)\}^{1/(2-\alpha)} \cdot t^{6.5/(2-\alpha)}x^2 \quad (40)$$

となる. この2つの式から q を消去すれば2階の微分方程式

$$\begin{aligned} & (1/x^2)(d/dx)\{x^2 \cdot (dt/dx)\} \\ & = -\{(2-\alpha)/(8.5-\alpha)\} \times \{(2-\alpha)/C(8.5-\alpha)\}^{1/(2-\alpha)} t^{6.5/(2-\alpha)} \end{aligned} \quad (41)$$

となり, これはいわゆる Lane-Emden の微分方程式である. これを解くのに満たすべき境界条件は

$$t = 0; \quad dt/dx = -(2-\alpha)/(8.5-\alpha) \quad (\text{at } x = 1) \quad (42)$$

この2階の微分方程式(41)は, 任意の C に対して境界条件(42)を満たす唯一の解を持つ. 他方, Lane-Emden 方程式の理論から判ることは, $x = 1$ において傾斜 dt/dx の種々の初期値で出発した(41)式の全ての解の中で, $x = 0$ で有限で残り得る解はただ一つしかない. 他の解は全て原点 $x = 0$ が特異点になる. 境界条件(42)を満たし, (41)の解が $x = 0$ で特異性を持たないためには, C は決まった値でなければならない. こうして一様源モデルの場合にも C はやはり決定される定数である. このようにして決められた定数 C の値は点源モデルの条件で決められる値とは異なるが, それが決定される定数である限り, 質量 - 光度 - 半径の関係式は(34)式と同じ形をとる.

水素対流層 Hydrogen convection zone : (Solar System Astrophysics)

光球の下にある対流領域で起こっている物理過程については, まだ満足な理論はないが, この領域を幾分でも理解することは, それが引き起こしている多くの観測可能な現象のために重要である. 対流領域では温度傾斜は

$$[\pi F]_{total} = [\pi F]_{conv} = [\pi F]_{rad} \quad (1)$$

の式から計算しなければならない. このため対流フラックスの式が必要である.

Schwarzschild の安定性・判別式を次の形で書こう.

$$\{d \log T / d \log P\}_{rad} > \{d \log T / d \log P\}_{ad} \quad (2)$$

太陽の光球下の領域でこの不等式を議論するため、断熱傾斜を計算するのに水素の電離を考慮する必要がある。断熱条件は熱力学第 1 法則から導ける。 E/ρ を単位質量当たりのエネルギー、 $1/\rho$ を単位質量当たりの体積とする。すると熱力学第 1 法則は

$$d(E/\rho) + Pd(1/\rho) = dQ = 0 \quad (3)$$

であり、この式は

$$(dE/P) = (d\rho/\rho)\{1 + (E/P)\} \quad (4)$$

ここで先ず運動エネルギーだけを持つ理想気体を考えよう。状態方程式は

$$P = \rho kT / m_H \mu \quad (5)$$

又

$$E = (3/2)(\rho kT / m_H \mu) = (3/2)P \quad (6)$$

これらの式の対数微分をとれば

$$(dP/P) = (d\rho/\rho) + (dT/T) \quad (7)$$

$$dE = (3/2)dP \quad (8)$$

(4), (6), (7), (8)式から通常の関係

$$(dP/P) = (5/2)(dT/T) \quad (9)$$

が得られる.

一般にエネルギーは運動, 電離, 励起のエネルギーから成っている. この場合 $\rho = \rho(T, P)$, $E = E(T, P)$ あるいは

$$(dE/P) = c_1(dT/T) + c_2(dP/P) \quad (10)$$

$$(d\rho/\rho) = -c_3(dT/T) + c_4(dP/P) \quad (11)$$

これらの式は(8), (7)式の一般化した類推 analog である. これらと断熱条件の(4)式とから

$$\begin{aligned} & [(dT/T)/(dP/P)]_{ad} \\ & = [-c_2 + \{1 + (E/P)\}c_4]/[c_1 + \{1 + (E/P)\}c_3] \end{aligned} \quad (12)$$

もし水素の電離の影響を考えると, 理想気体の法則(5)は

$$P = (k/m_H\mu)(1+x)\rho T \quad (13)$$

ここで x は電離度であり, また μ は $x=0$ に対する時と同じ値をとる. するとエネルギー (励起エネルギーを無視して) は

$$E = (3/2)P + (x\rho/m_H\mu)I \quad (14)$$

ここで I は電離エネルギーである. これらの関係と Saha の公式とで, (12)式はこの場合

$$\begin{aligned} & [d \log T / d \log P]_{ad} \\ & = [1 + (1/2)x(1-x)\{(5/2) + (I/kT)\}] \\ & \div [(5/2) + (1/2)x(1-x)\{(5/2) + (I/kT)\}^2] \end{aligned} \quad (15)$$

電離度は $x(1-x)$ の積でだけ現われているので, 傾斜はゼロ電離 ($x=0$) あ

るいは全電離 ($x = 1$) に対して同じであることに気付く。

TABLE 14.7. THE CONSTANTS FOR THE POINT-SOURCE MODELS

a	0.0	0.250	0.375	0.500	0.550	0.600	0.625
$C(a)$	3.04×10^{-4}	6.47×10^{-4}	1.80×10^{-3}	3.09×10^{-3}	5.90×10^{-3}	8.59×10^{-3}
Fraction of mass in core.....	0.145	0.1183	0.1057	0.09395	0.0892	0.0847	0.0826
Fraction of the radius occupied by core.....	0.169	0.1217	0.0967	0.07104	0.0603	0.0496	0.0443
$\rho_c/\bar{\rho}$	37.0	79.1	139.2	309.7	477.9	813.4	1112.
$Q\ddagger$	20.8	25.9	30.6	39.0	44.6	52.6	58.1

† This is the factor in the formula, $T_c = Q\ddagger \frac{M}{R} \times 10^6$ °K, for the central temperature when M and R are expressed in solar units.

E 14.9. THE INTERNAL DENSITIES AND TEMPERATURES IN THE SUN AND
Sirius A

	Sun	<i>Sirius A</i>
X	0.593†	0.68†
Y	0.362†	0.28†
μ	0.676†	0.629†
T_c	17.5×10^6 °K	21.4×10^6 °K
ρ_c	112 gm/cm ³	46 gm/cm ³
T } at interface between convec-	14.2×10^6 °K	17.3×10^6 °K
ρ } tive core and radiative	81 gm/cm ³	34 gm/cm ³
envelope		

These values are derived in the next section.

TABLE 14.8. THE DENSITY AND TEMPERATURE DISTRIBUTIONS IN POINT-SOURCE MODELS

$\alpha = 0.0$			$\alpha = 0.375$		
x	ρ/ρ_c	T/T_c	x	ρ/ρ_c	T/T_c
0.0	1.000	1.000	0.0	1.000	1.000
0.0569	0.961	0.974	0.0250	0.980	0.987
0.1138	0.852	0.898	0.0500	0.923	0.948
0.1691	0.699	0.788	0.0750	0.836	0.888
0.1708	0.693	0.784	0.0967	0.743	0.820
0.2277	0.508	0.661	0.1198	0.625	0.745
0.2846	0.330	0.551	0.1521	0.450	0.649
0.3415	0.197	0.455	0.1912	0.272	0.546
0.3985	0.110	0.372	0.2376	0.137	0.445
0.4554	5.90×10^{-2}	0.303	0.2912	5.91×10^{-2}	0.352
0.5123	3.05×10^{-2}	0.245	0.3513	2.26×10^{-2}	0.273
0.5692	1.51×10^{-2}	0.196	0.4166	8.07×10^{-3}	0.209
0.6262	7.16×10^{-3}	0.156	0.5309	1.34×10^{-2}	0.133
0.6831	3.20×10^{-3}	0.121	0.6419	2.14×10^{-4}	0.0841
0.7400	1.30×10^{-3}	0.0919	0.7398	3.40×10^{-5}	0.0531
0.7969	4.60×10^{-4}	0.0666	0.8183	5.40×10^{-4}	0.0335
0.8538	1.26×10^{-4}	0.0448	1.0000	0.0	0.0
0.9108	2.06×10^{-5}	0.0256			
0.9677	6.22×10^{-7}	0.00873			
0.9962	5.4×10^{-10}	0.00100			
1.0000	0.0	0.0			

$\alpha = 0.25$			$\alpha = 0.500$		
x	ρ/ρ_c	T/T_c	x	ρ/ρ_c	T/T_c
0.0	1.000	1.000	0.0	1.000	1.000
0.0500	0.948	0.965	0.0250	0.966	0.977
0.0750	0.887	0.923	0.0500	0.871	0.912
0.1000	0.808	0.867	0.0710	0.755	0.830
0.1217	0.728	0.809	0.0886	0.638	0.755
0.1368	0.666	0.767	0.1118	0.470	0.667
0.1509	0.604	0.729	0.1403	0.294	0.572
0.1829	0.463	0.648	0.1745	0.154	0.474
0.2199	0.318	0.563	0.2150	6.84×10^{-2}	0.384
0.2619	0.194	0.478	0.2619	2.68×10^{-2}	0.305
0.3087	0.106	0.397	0.3150	9.62×10^{-3}	0.239
0.3600	5.34×10^{-2}	0.325	0.3734	3.29×10^{-3}	0.185
0.4146	2.51×10^{-2}	0.262	0.4785	5.22×10^{-4}	0.121
0.4713	1.13×10^{-2}	0.210	0.5856	8.11×10^{-5}	0.0785
0.5288	4.94×10^{-3}	0.168	0.6852	1.25×10^{-5}	0.0510
0.5855	2.13×10^{-3}	0.134	0.7702	1.92×10^{-4}	0.0332
0.6402	9.12×10^{-4}	0.106	1.0000	0.0	0.0
0.6911	3.89×10^{-4}	0.0845			
0.7800	7.05×10^{-5}	0.0534			
0.8993	2.30×10^{-4}	0.0212			
1.0000	0.0	0.0			

TABLE 14.8. THE DENSITY AND TEMPERATURE DISTRIBUTIONS IN POINT-SOURCE MODELS.—(Continued)

$\alpha = 0.550$			$\alpha = 0.625$		
x	ρ/ρ_c	T/T_c	x	ρ/ρ_c	T/T_c
0.0	1.000	1.000	0.0	1.000	1.000
0.0200	0.970	0.980	0.0150	0.970	0.980
0.0400	0.887	0.923	0.0300	0.887	0.923
0.0603	0.761	0.834	0.0443	0.767	0.838
0.0675	0.706	0.798	0.0625	0.572	0.726
0.0852	0.560	0.716	0.0782	0.401	0.640
0.1071	0.385	0.625	0.0975	0.239	0.551
0.1336	0.223	0.532	0.1209	0.120	0.461
0.1656	0.108	0.440	0.1490	5.15×10^{-2}	0.378
0.2034	4.55×10^{-2}	0.355	0.1822	1.97×10^{-2}	0.304
0.2472	1.71×10^{-2}	0.282	0.2209	6.97×10^{-3}	0.242
0.2970	5.98×10^{-3}	0.221	0.2652	2.35×10^{-3}	0.191
0.3522	2.01×10^{-3}	0.173	0.3148	7.71×10^{-4}	0.151
0.4528	3.14×10^{-4}	0.114	0.4071	1.17×10^{-4}	0.101
0.5810	4.81×10^{-5}	0.0750	0.5065	1.76×10^{-5}	0.0678
0.6571	7.33×10^{-6}	0.0493	0.6055	2.64×10^{-6}	0.0453
0.7447	1.11×10^{-6}	0.0324	0.6965	3.94×10^{-7}	0.0303
1.0000	0.0	0.0	1.0000	0.0	0.0

$\alpha = 0.600$		
x	ρ/ρ_c	T/T_c
0.0	1.000	1.000
0.0150	0.976	0.984
0.0300	0.907	0.937
0.0496	0.766	0.837
0.0644	0.627	0.752
0.0809	0.460	0.668
0.1010	0.289	0.578
0.1255	0.153	0.486
0.1550	6.85×10^{-2}	0.400
0.1898	2.70×10^{-2}	0.322
0.2304	9.75×10^{-3}	0.256
0.2766	3.33×10^{-3}	0.202
0.3281	1.10×10^{-3}	0.159
0.4234	1.69×10^{-4}	0.106
0.5248	2.55×10^{-5}	0.0705
0.6242	3.85×10^{-6}	0.0469
0.7142	5.78×10^{-7}	0.0312
1.0000	0.0	0.0

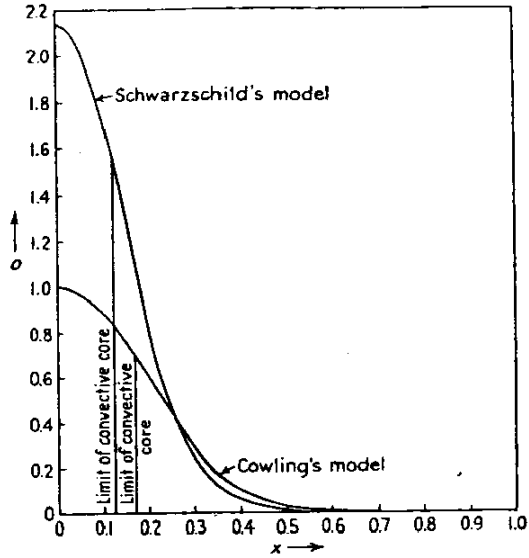


Fig. 14.5. The relative distributions of density in the Cowling and in the Schwarzschild models. The limit of the convective core in each case is indicated.

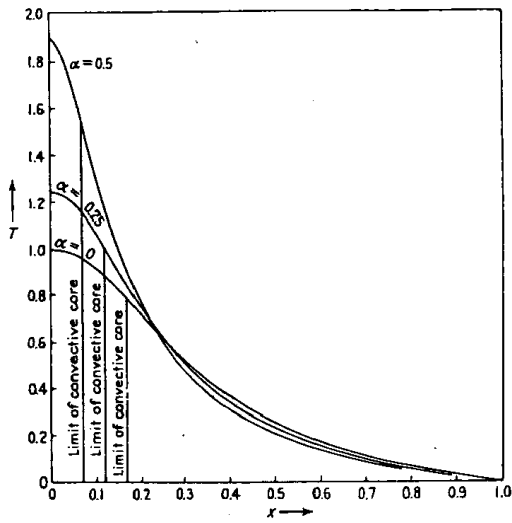


Fig. 14.6. The relative distributions of temperature in the point-source models on the law of opacity $x \propto \rho^{1-\alpha} T^{3.5}$. The cases $\alpha = 0$, $\alpha = 0.25$, and $\alpha = 0.5$ are illustrated. The limit of the convective core in each case is indicated.

Chapt. 2. 恒星のエネルギー源

§ 6. 太陽のタイム・スケール

前節で、主系列にある恒星の内部の温度および密度はそれぞれ 2×10^7 K および 100 g/cm^3 程度に違いないことを知った。次の問題は、このような条件で如何なる物理過程が起こり得るか、また観測されるエネルギー生成率を説明し得るかということである。太陽では平均のエネルギー生成は $2 \text{ erg/gm} \cdot \text{sec}$ であるが、点源モデルの仮定に基づいて全エネルギーは対流核で遊離されねばならないから $1.5 \times 10^7 \text{ K} \sim 2 \times 10^7 \text{ K}$ の温度範囲では平均 $20 \sim 100 \text{ erg/gm} \cdot \text{sec}$ の割合でエネルギーが生成される過程が必要である。これらの過程の性質を詳しく決める前に、先ず問題の一般的な提起を述べることは興味がある。

人類の活動に果たしている太陽エネルギーの中心的役割と言う観点に立てば、知恵のある人間が非常に古くからこのエネルギー源に関心を抱いたことは当然のことである。実際、全ての国や国民の神話の中には、この問題に対する空想的な記録がある。しかしながら、物理学の知識に基づいた仮定が推進されるようになったのは、僅かに前世紀以来のことである。そして、これらの初期の試みの中で最も重要なものは、Helmholtz & Kelvin の《収縮仮説》Contraction hypothesis である。この仮説によれば、太陽エネルギーは太陽自身の緩やかな収縮によって生成される。収縮とは物質が中心に向かって接近あるいは落下することだから、重力のポテンシャル・エネルギーのある量が遊離され、熱として利用されることになる。Helmholtz & Kelvin の仮説に基づいて、当時はそれ以外にこのように大きいエネルギー源が知られていなかったため、これが太陽放射の源であると想像された。しかしながら、このエネルギー供給は無限に続く訳にはいかない。そして収縮仮説によれば、太陽の“誕生”は 5×10^7 年より以前ではないことになる。収縮仮説に基づくこの太陽《年令》の推定は次のようにして得られる。

ポテンシャル・エネルギー Ω は、無限に《拡がっている》物質を一定の分布に持ってくのに（系に対して）なされる仕事として定義されるから、物質の球対称分布に対してポテンシャル・エネルギーは

$$\Omega = -G \int_0^M M(r) dM(r)/r \quad (1)$$

が得られる。

さて温度 T における理想気体の内部（熱）エネルギーは1 gm当たり $C_V T$ である。ただし C_V は定積比熱である。従って恒星の内部熱エネルギーは

$$\begin{aligned} U &= C_V \int_0^M T dM(r) = \{1/(\gamma - 1)\}(k/\mu H) \int_0^M T dM(r) \\ &= \{1/(\gamma - 1)\}(k/\mu H) M \bar{T} \end{aligned} \quad (2)$$

で与えられる。ここで γ は比熱の比 (C_p/C_V) であり、 \bar{T} は平均温度である。（矢張り輻射圧は無視している）。

(1.11)で得られた \bar{T} の式と(1)の Ω の式を比較すれば

$$M \bar{T} = -(1/3)(\mu H/k) \Omega \quad (3)$$

を得る。これを(2)式に代入すれば

$$U = -\{1/3(\gamma - 1)\} \Omega \quad (4)$$

従って全エネルギー（内部エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和）は

$$E = U + \Omega = \{(3\gamma - 4)/3(\gamma - 1)\} \Omega \quad (5)$$

(4), (5)式は A. Ritter と J. Perry によって独立に得られた式である。そしてこれは重力平衡にある恒星に対して全エネルギー E とポテンシャル・エネルギー Ω との間の関係である。(5)式は輻射圧が気体圧に比べて無視できる場合にのみ当てはまる。重要な単原子気体 Monatomic gas, $\gamma = 5/3$ に対して

$$E = (1/2) \Omega \quad (6)$$

を得る。また元 dimension の考察から、恒星の密度分布に依存する数値定数 q を用い

$$\Omega = -q(GM^2/R) \quad (7)$$

と書くことができる。先に考えた点源モデルに対しては $q \sim 1.5$ であって

$$E \sim -0.75(GM^2/R) \quad (8)$$

と書くことができるだろう。もしその恒星がある一定の速度で一様に収縮すると仮定すれば、エネルギーは

$$-dE/dt = -0.75(GM^2/R^2)(dR/dt) \quad (9)$$

の割合で遊離されるだろう。収縮仮設によればこれが恒星の光度に等しく

$$L = -0.75(GM^2/R^2)(dR/dt) \quad (10)$$

逆に、観測光度 L は、この仮設によれば、収縮速度が

$$(1/R)(dR/dt) = -(4/3)(L/GM^2) \quad (11)$$

で与えられることを示している。太陽の L , R , M の値を代入すれば

$$(1/R)(dR/dt) = -4 \times 10^{-8} \text{ year}^{-1} \quad (12)$$

を得る。この収縮速度では、太陽は 2.5×10^7 年の間には半径が $1/e$ になって、すっかり様変わりしてしまうに違いない。同様に 2.5×10^7 年以前には、太陽は現在と非常に違っていたと想像せざるを得ない。これが Helmholtz-Kelvin の 5×10^7 年というタイム・スケールの根拠である。

さて収縮仮設によれば避けられない結論、即ち太陽が 10^8 年昔には非常に違っていたという結論は地質学的証拠、特にウラニウム-鉛の観測比から得られる岩石や鉱物の年齢の決定によるものと矛盾する。従って、収縮仮設は太陽エネルギー、従ってまた主系列星のエネルギー源としては放棄せざるを得ない。しかしながら、Helmholtz-Kelvin が想像したような恒星の収縮は、恒星進化のある時期に重要な役割を果たしていることは、なお可能である。

ここで述べた収縮説の議論によれば、次のようなことが判る。恒星のエネルギー源を探す場合に、現在観測されるエネルギー生成率を説明する物理機構であるだけでなく、その供給が十分長い期間継続し得るという要求も考えねばならない。このようにして太陽の場合、求める機構は現在の割合で、エネルギーを少なくとも 2×10^9 年（これは地球で発見された最も古い鉱物の年齢である）程度の期間供給しなければならぬ。言い換えれば恒星のエネルギーの問題は Jeans も言ったように《強度の問題だけでなく、また期間の問題でもある》。

さて太陽程度の恒星に対して 3×10^9 年程度のタイム・スケールを認めるようなエネルギー源は水素からヘリウムへの変換である。 $0 = 16$ として水素の質量は 1.00813 であり、ヘリウム原子の質量は 4.00389 である。その結果、4 個の水素原子が 1 個のヘリウム原子に変換すれば

$$1.00813 \times 4 - 4.00389 = 0.02862 \quad (13)$$

の質量に対応するエネルギーが遊離されるだろう。言い換えれば、1 gmの水素は $0.02862 / (1.00813 \times 4) \sim 0.00071$ gmに相当するエネルギー、即ち

$$0.0071 \times c^2 = 6.4 \times 10^{18} \text{ erg} \quad (14)$$

を遊離するだろう。もしこの変換が太陽質量の約10%を含む対流核だけで起こるとすれば、太陽光度を説明するためには核の物質1 gm当たり約 20 erg/secを遊離しなければならぬ。もし更に水素の相対量が重さで50%であると考えると、対流核の中には

$$(1/20) \times (1/2) \times 6.4 \times 10^{18} \text{ sec} = 4.5 \times 10^9 \text{ year} \quad (15)$$

を維持するに十分な水素があることになる。このような考えによれば、水素のヘリウムへの変換は要求される長期間継続し得るエネルギー源を提供する。しかしながら、安全度にそれ程の余裕がないことに注意しなければならない。他方、もし恒星の進化の期間中に内部の物質が十分よく攪拌されていると仮定すれば、約 10 倍長いタイム・スケール、即ち 3×10^{10} 年を得ることになる。しかし物質は一樣に mix されているだろうか。この問題はまた後ほど考える。

この議論で示唆されることは、恒星の内部で示された条件で、何か原子核反応が起こり得るだろうかということである。

§7. 炭素一窒素循環反応

実験室の実験で原子核反応は、例えば、陽子との衝突で起こり、変換が起こるためには陽子は必ずしも核を取り巻くポテンシャル障壁以上のエネルギーを持たなくてもよいことが判る。この理由は、量子論によれば、核と衝突する陽子は仮にそれがポテンシャル障壁を越えるほど十分なエネルギーを持っていなくても核の中に潜りこむ tunneling 有限な確率を持っていることになる。特に荷電 Z_1e , Z_2e , 質量 M_1 , M_2 の 2 つの核が相対運動のエネルギー E で衝突したならば、量子論によって、核が互いに貫入し《複合核》を作る確率は

$$W = \exp[-2\{2M_1M_2/(M_1 + M_2)\}^{1/2}(\pi^2Z_1Z_2e^2/hE^{1/2})] \quad (1)$$

で与えられる。そこで

$$E = kTy \quad (2)$$

と書き、数値を代入すると

$$W = \exp[-1.068 \times 10^5 \{A_1A_2/(A_1 + A_2)\}^{1/2} (Z_1Z_2/T^{1/2}y^{1/2})] \quad (3)$$

ここで A_1 , A_2 は $H = 1$ とした時の核の原子量である。

(3)式によれば貫入の確率は 10^7K 程度の温度でさえ極めて小さく、指数には Z_1Z_2 因子が含まれているので、衝突の一方が陽子でない核反応は一般に考える必要のないことは明らかである。

上記のように(1)式は《1衝突当たり》複合核を作る確率を与える。しかし、衝突とは何だろうか？ これを定義するためには衝突断面積を決定しなければならない。そして、それはもし2つの衝突核が衝突期間中にこの面積内を互いに通過する時、それらが複合核を作る確率が W で与えられるようなものでなければならない。今考えているような形式の衝突に対する断面積は、衝突粒子の質量中心が静止しているような座標系における、それら粒子の De Broglie 波長で決定される。即ち

$$\pi\sigma^2 \sim \pi(h/2\pi)^2 \{(M_1 + M_2)/M_1M_2\}(1/2E) \quad (4)$$

熱的平衡条件のもとでは相対運動の運動エネルギーが $(E, E + dE)$ の範囲にある衝突の数は単位容積当たり

$$\sigma^2 \{2N_1N_2/(kT)^{3/2}\} \{2\pi(M_1 + M_2)/M_1M_2\}^{1/2} e^{-E/kT} E dE \quad (5)$$

で与えられる。ここで N_1, N_2 は 2 種の核の単位容積当たりの数である。

(3), (4), (5) を組合せ、 y の範囲について積分すれば、単位時間内に貫入に成功する数として

$$\begin{aligned} & \{N_1N_2/(kT)^{1/2}\} (h^2/2\pi)^3 \{2\pi(M_1 + M_2)/M_1M_2\}^{3/2} \\ & \times \int_0^\infty \exp\{-y - 2Q^3y^{-1/2}\} dy \end{aligned} \quad (6)$$

を得る。ここで {(3)式を見よ}

$$Q^3 = 5.340 \times 10^4 \{A_1A_2/(\{A_1+A_2\})^{1/2} (Z_1Z_2/T^{1/2})\} \quad (7)$$

(6)式の integrand は 2 つの因子から成っていることが判る。1 つは $y \rightarrow \infty$ とともに指数的に減少し (トンネル効果), 他は 0 から 1 まで単調に増加する (衝突確率)。そして Q^3 は一般に大きい数だから, 最大値は y の大きい値に対して起こるに違いない。実際, 最大値は

$$y^* = Q^2 = (1.418 \times 10^3/T^{1/3}) \{A_1A_2/(\{A_1+A_2\})\}^{1/3} (Z_1Z_2)^{2/3} \quad (8)$$

で起こる。この y^* の値に対応するエネルギーは

$$E^* = kTQ^2 = 0.1222 \{A_1A_2/(\{A_1+A_2\})\}^{1/3} (Z_1Z_2)^{2/3} T^{2/3} \text{ eV} \quad (9)$$

である。この式に従って、陽子 ($A_1 = 1, Z_1 = 1$) と炭素核 ($A_1 = 6, Z_1 = 12$) との間の $T = 2 \times 10^7 \text{ K}$ における衝突について、成功する貫入は 27 keV 程度のエネルギーで最も頻繁に起こる。この値は実験室で核反応が観測されている最低エネルギーの約 1/10 にしかならない。そのように小さいエネルギーを扱うことを認めることが大切である。

さて(6)式の積分を近似的に求めてみよう。(8)式で述べたようにこの積分の integrand は $y = Q^2$ で鋭い最大値を持つ。従って integrand の指数を $y = Q^2$ の付近で Taylor 級数に展開すると

$$y + 2Q^3 y^{-1/2} = 3Q^2 + \{(3/4)(y - Q^2)^2/Q^2\} + O(y - Q^2)^3 \quad (10)$$

従って積分の値は、 Q が大きい数であることを考えて [(8)式参照]，積分の中で(10)式を用いて得られる。積分は

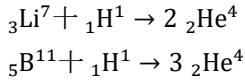
$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \exp(-y - 2Q^3 y^{-1/2}) dy \\ &\sim \exp(-3Q^2) \int \{-3Q^2 \rightarrow \infty\} \exp\{-3(y - Q^2)^2/4Q^2\} d(y - Q^2) \\ &= 2(\pi/3)^{1/2} \cdot Q \cdot \exp(-3Q^2) \end{aligned} \quad (11)$$

従って(6)の近似的な値は

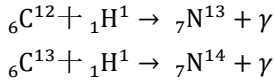
$$\begin{aligned} &\{h^2/(2\pi)^3\} \{N_1 N_2 / (kT)^{1/2}\} \\ &\times \{2\pi(M_1 + M_2)/M_1 M_2\}^{3/2} \cdot 2(\pi/3)^{1/2} Q \exp(-3Q^2) \end{aligned} \quad (12)$$

この式は温度 T の集合で 2 種の核間で起こる成功的な貫入数を与える。これは起こる核反応の数を表わしてはいない。この量を求めるには成功的な貫入に続いて、何時でも成功的な反応が起こるのではないという事実を表わす因子、即ち成功的な貫入に対して成功的な反応が起こる確率を(12)式に掛けねばならない。この因子に関する状況は次のようである。

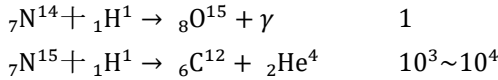
もし続いて起こるのが 2 つ以上の粒子への《複合核の分裂》disintegration である場合には、貫入に続いて常に分裂が起こる。このような反応の例は



他方、もし複合核が分裂するほど十分なエネルギーを持たない時には、陽子は一般に再放出される。しかし、稀には複合核は γ 線を放出し、輻射的に陽子を捕獲する。このような輻射捕獲 Radiative capture の例は



などによるものである。輻射捕獲が稀にしか起こらないのは、複合核の輻射遷移に対する平均寿命が複合核自身の平均寿命に比べて著しく長いからであり、実際その比は 10^6 程度である。この顕著な例は次の 1 組の反応である。



100 keV 程度の陽子エネルギーに対して後者は前者に比べて約 $10^3 \sim 10^4$ 倍も起こり易いことが観測されている。

(12)式に戻り、この式に 1 貫入当たりの反応の確率を表わす因子を掛けなければならない。この因子は一般に

$$\Gamma\{M_1 M_2 / (M_1 + M_2)\} (R^2 / \hbar) \quad (\hbar = h / 2\pi) \quad (13)$$

の形で書ける。ここで Γ は反応に対する複合核の平均寿命の逆数であり、 R は複合核の半径である。(13)式の第 2 の因子は、実質的には、複合核の振動の基本周期であることが判るだろう。(12), (13)式により、1 gr 当たり毎秒 2 種の核間で起こる核反応数は

TABLE 14.10. MEAN LIFE OF NUCLEI FOR TYPICAL CONDITIONS IN THE INTERIOR OF STARS

Reaction	Mean life		Reference to notes
	$T = 20 \times 10^8 \text{ }^\circ\text{K}$ $\rho X = 30 \text{ gm/cm}^3$	$T = 16 \times 10^8 \text{ }^\circ\text{K}$ $\rho X = 120 \text{ gm/cm}^3$	
$H + H \rightarrow D^2 + \beta$	4.8×10^{10} years	2.4×10^{10} years	
$D^2 + H = He^3$	2 sec	3 sec	1
$T^2 + H = He^4$	0.2 sec	0.3 sec	2
$He^2 + He^4 = Be^7$	10^8 years	10^8 years	3
$He^2 + He^4 = He^4 + H + H$	2×10^8 years	2×10^8 years	4
$Li^6 + H = He^4 + He^3$	5 sec	12 sec	5
$Li^7 + H = 2He^4$	1 min	3 min	5
$Be^9 + H = Li^6 + He^4$	15 min	65 min	5
$B^{10} + H = C^{11}$	1000 years	7000 years	5
$B^{11} + H = 3He^4$	3 days	21 days	5
$C^{12} + H = N^{13}$	1.2×10^5 years	1.3×10^6 years	6
$C^{13} + H = N^{14}$	$\leq 2.8 \times 10^4$ years	$\leq 2.5 \times 10^5$ years	6
$N^{14} + H = O^{15}$	2.2×10^6 years	4.1×10^7 years	6
$N^{15} + H = He^4 + C^{12}$	520 years	9.5×10^3 years	6
$O^{16} + H = F^{17}$	10^{12} years	3×10^{11} years	5
$F^{19} + H = O^{16} + He^4$	3×10^7 years	10^8 years	5
$Ne^{22} + H = Na^{23}$	2×10^{12} years	10^{14} years	5

¹ Cross section as determined by Fowler.

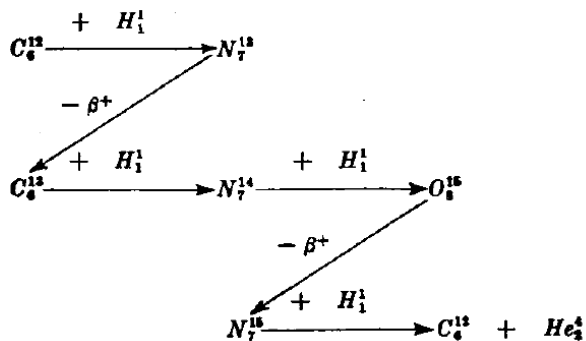
² With Bethe's estimated cross section. *Phys. Rev.*, **55**, 434 (1939).

³ Assuming $V = 0.25X$ and using Bethe's cross section. *Phys. Rev.*, **55**, 434 (1939).

⁴ On the assumption that $n(He^2) = 10^{-2}n(H)$; this ratio will prevail under conditions of secular equilibrium at $T = 16 \times 10^8 \text{ }^\circ\text{K}$ and $\rho X = 120$.

⁵ H. A. Bethe. *Phys. Rev.*, **55**, 434 (1939).

⁶ Cross sections from W. A. Fowler. *Phys. Rev.*, **81**, 655 (1951); see also I. Epstein. *A. p. J.*, **113**, 207 (1950).



$$P = \{h^3/(2\pi)^{3/2}\}(\rho x_1 x_2/M_1 M_2)\{(M_1 + M_2)/M_1 M_2\}^{1/2} \\ \times (\Gamma/h)\{R^2/(kT)^{1/2}\} \cdot 2(\pi/3)^{1/2} Q \cdot \exp(-3Q^2) \quad (14)$$

で与えられる。この式に定数値を代入すれば次の形に書き替えることができる

$$P = 5.3 \times 10^{25} \rho x_1 x_2 \Gamma \{(A_1 + A_2)^3 / A_1^4 A_2^4 Z_1^3 Z_2^3\} (8R/a)^2 \\ \times [4250/T^{1/3} \{A_1 A_2 Z_1^2 Z_2^2 / (A_1 + A_2)\}^{1/3}]^2 \\ \times \exp[-(4250/T^{1/3})\{A_1 A_2 Z_1^2 Z_2^2 / (A_1 + A_2)\}^{1/3}] \quad (15)$$

この式で $h\Gamma$ は eV 単位で表わしてあり、

$$a = h^2(M_1 + M_2)/e^2 M_1 M_2 Z_1 Z_2$$

は系の Bohr 半径である。密度や化学組成に無関係な量は

$$\lambda = (M_2/x_2)(P/\rho x_1) \quad (16)$$

である。 $\lambda \rho x_1 = M_2 P/x_2$ は与えられた type2 の核が type1 の任意の核と反応を起こす毎秒の確率を表わしている。もし他に type2 の核を作る別の反応がなければ、 $1/\lambda \rho x_1$ は type2 の核の平均寿命を与える。

Bethe は陽子誘導反応の実験結果を用い、(12)によって $T = 2 \times 10^7$ K, $\rho x_1 = 30$ gr/cc に対して種々の核の平均寿命を計算している。その結果を、最近の実験結果に基づいて修正し、表 14.10 に示してある。

この表に示された平均寿命を一見して矛盾を感じずるかも知れない。何故なら、核変換がかなり頻繁に起こるには軽原子核 ($Z_2 < 8 \sim 9$) との反応を考えなければならない。ところが軽い核は極めて急速に崩壊してしまうので、そのようなものを継続的なエネルギー源としては利用できないだろうと思われるからである。この矛盾を解決する1つの方法は軽い核を含む一連の核反応の連鎖を考えて、それに関係する核が永久に崩壊してしまわないようにすることである。Bethe らの研究で示されたように、実際、このような連鎖反応は炭素と窒素の

同位元素を用いて次のように作ることができる。

${}^6\text{C}^{12}$ 核が ${}^1_1\text{H}^1$ と衝突する場合に、唯一可能な反応は輻射捕獲によって ${}^7_7\text{N}^{13}$ になることである。 ${}^7_7\text{N}^{13}$ は陽電子-活性 positron-active な核であって、平均寿命 10.13 分で崩壊し、安定な炭素同位元素 ${}^6_6\text{C}^{13}$ となる。 ${}^6_6\text{C}^{13}$ は ${}^1_1\text{H}^1$ と衝突しても崩壊は起こらず、唯一可能な反応は ${}^1_1\text{H}^1$ を輻射捕獲して ${}^7_7\text{N}^{14}$ になることである。 ${}^7_7\text{N}^{14}$ は矢張り ${}^1_1\text{H}^1$ を輻射捕獲し ${}^8_8\text{O}^{15}$ に変換することができる。 ${}^8_8\text{O}^{15}$ は陽電子-活性な核で、平均寿命約 2 分で崩壊して安定な ${}^7_7\text{N}^{15}$ 核になる。この ${}^7_7\text{N}^{15}$ は ${}^1_1\text{H}^1$ との衝突で ${}^6_6\text{C}^{12}$ と ${}^2_2\text{He}^4$ (α 粒子)に崩壊する。前述の注意によって、この最後の反応は以上の反応の中、最大の確率断面積を持っている。今述べた反応の系列は次のように図示することができる(前ページ挿入図)。

このように触媒 catalysis の作用をする炭素、窒素の同位元素によって、4 個の陽子は 1 個のヘリウム核に変換される。この循環の間には、2 個の陽電子が放出されるので荷電も保存されている。これら 2 個の陽電子は直ちに電子と結合して消滅し、 γ 線に変わる。 ($e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma + 1.022 \text{ MeV}$)。

核反応の立場から、この炭素循環の最も著しいことは輻射捕獲が次々に起こることである。これは、 ${}^6_6\text{C}^{12}$ 、 ${}^6_6\text{C}^{13}$ 、 ${}^7_7\text{N}^{14}$ の核が、陽子との衝突では 2 つ以上の粒子に分裂するのに十分なエネルギーを持つ複合核を形成できないために可能である。これは、更に安定核の既知の質量からきている。

炭素循環の種々な反応の実験的データが第 11 表にまとめてある。

Reaction	Data
${}^6_6\text{C}^{12} + {}^1_1\text{H}^1 \rightarrow {}^7_7\text{N}^{13}$	$\hbar\Gamma = 12 \text{ ev}$
${}^7_7\text{N}^{13} \rightarrow {}^6_6\text{C}^{13} + \beta^+ + \text{neutrino}$	Half life 10.13 min
	$E_{\text{max}} = 1.24 \text{ mev} = 1.30 \text{ mmu}$
${}^6_6\text{C}^{13} + {}^1_1\text{H}^1 \rightarrow {}^7_7\text{N}^{14}$	$\hbar\Gamma = 56 \text{ ev}$
${}^7_7\text{N}^{14} + {}^1_1\text{H}^1 \rightarrow {}^8_8\text{O}^{15}$	$\hbar\Gamma = 110 \text{ ev}$
${}^8_8\text{O}^{15} \rightarrow {}^7_7\text{N}^{15} + \beta^+ + \text{neutrino}$	Half life 126 sec
	$E_{\text{max}} = 1.76 \text{ mev} = 1.85 \text{ mmu}$
${}^7_7\text{N}^{15} + {}^1_1\text{H}^1 \rightarrow {}^6_6\text{C}^{12} + {}^2_2\text{He}^4$	$\hbar\Gamma = 4 \times 10^6 \text{ ev}$

この表に示された定数は第 10 表の平均寿命を計算するのに使われている。この炭素循環の反応は、従って、前述の矛盾を解決している：それは軽い核

とで起こっており，参加する核は何時までも破壊されてしまわない．それらは水素からヘリウムへの変換でただ触媒の作用をするだけである．さてこの炭素循環が太陽や主系列高温星の観測されたエネルギー生成率を説明する適当なエネルギー源を提供することを示そう．

既に述べたように，4 個の水素原子が 1 個のヘリウム原子に変換すると，28.6 milli-mass unit に相当するエネルギーが遊離される (§ 6.13)．しかしながら，この変換が炭素循環によって完成される時は実際に利用できるエネルギーは途中で起こる 2 つの β 過程のために，それより幾分少なくなる．何故なら β 過程では β 線スペクトルの最大のエネルギーの一部分だけが電子の運動エネルギーの形で利用でき，残りはニュートリノ *neutrino* に行ってしまう（ニュートリノは β 過程で電子と同時に放出されると考えられている）．そしてニュートリノは物質とはごく弱い相互作用しかしないと信じられているので，それらは恒星のように巨大な物体でさえ何の抵抗もなく貫通してしまうと想像される．従ってニュートリノに渡されたエネルギーは恒星の熱源にはならず全く失われてしまう．こうして約 5/8 のエネルギーが失われると推定されるので炭素循環に含まれる 2 つの β 過程で，ニュートリノ放出で損失するエネルギーは第 11 表より

$$(1.30 + 1.85) \times (5/8) = 2.0 \text{ mmu (milli - mass unit)}$$

である．従って 1 回の炭素循環が完了した時に遊離されるエネルギーは

$$28.6 - 2.0 = 26.6 \text{ mmu} = 0.0266 \cdot M_H c^2 \text{ erg}$$

であり，これに対するエネルギー生成率は最も起こり難い反応数 P (15)式

$$P = x_N / M_N \cdot t = \lambda \rho x_a x_N / M_N$$

を掛け

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= 0.0266M_{\text{H}}c^2 \cdot \rho \\
&= 0.0266M_{\text{H}}c^2x_{\text{N}}/M_{\text{N}} \cdot t \\
&= 0.0266c^2x_{\text{N}}/14 \cdot t
\end{aligned}
\tag{17}$$

で与えられる。ここで t は（実質的には最も長い ${}^7\text{N}^{14}$ 反応で決まる）炭素循環の周期であり、 x_{N} は質量による窒素の相対量である。 $T = 2 \times 10^7$ K, $\rho X = 30$ gr/cc では第 10 表より $t = 2.2 \times 10^6$ 年であり、窒素の相対量 $x_{\text{N}} \sim 1\%$ と仮定すれば、(17)式は

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \{[0.0266 \times (9 \times 10^{20}) \times 0.01]/[14 \times (2.2 \times 10^6 \times 3.16 \times 10^7)]\} \\
&= 246 \text{ erg/g} \cdot \text{sec}
\end{aligned}
\tag{18}$$

同様に $T = 1.6 \times 10^7$ K, $\rho X = 120$ g/cc では $t = 4.1 \times 10^7$ 年となり

$$\varepsilon = 13.2 \text{ erg/g} \cdot \text{sec}
\tag{18'}$$

となる。これらは明らかに太陽のエネルギー生成率を説明するのに要求されるオーダーである。

もし炭素循環が主系列早期星に対しても満足なものであるとすれば、 ε は温度 T に極めて敏感なはずである。何故なら、太陽の中心温度の高々 30% だけ高温なシリウス A (Sirius A の WR は太陽の 1.3 倍) が太陽の 40 倍も大きい光度 L を持っているからである。実際、炭素循環はこれを説明し得るほど温度に敏感なのであるが、これは次のようにして判る。 [註 1.34~40]

エネルギー生成率 ε は循環中最も遅い反応 (${}^7\text{N}^{14}$ 反応) の確率に比例するので(15)式から

$$\varepsilon = \text{const } T^{-3/2} \exp[-4250\{A_1A_2Z_1^2Z_1^2/(A_1+A_2)\}^{1/3}T^{-1/3}]
\tag{19}$$

となるが、この式から

$$\begin{aligned} (T/\varepsilon)(d\varepsilon/dT) &= -(2/3) + (1417/T^{1/3})\{A_1A_2Z_1^2Z_2^2/(A_1+A_2)\}^{1/3} \\ &= f(T) \end{aligned} \quad (20)$$

即ち $T = 2 \times 10^7 \text{K}$ で (炭素循環の ${}^7\text{N}^{14}\text{N}$ 反応では) $f(T) \sim 18$ となるので

$$(T/\varepsilon)(d\varepsilon/dT) = 18, \quad (d\varepsilon/\varepsilon) = 18(dT/T), \quad \varepsilon = \text{const } T^{18}$$

となり, この温度あたりでは ε は実質的に T^{18} に比例する. 同様に $T = 1.6 \times 10^7 \text{K}$ あたりでは ε は実質的に T^{20} に比例する. これらの高次のために, T の 30% 増加は ε の値にして約 110 倍, 190 倍に相当する.

以上のような炭素循環の定量的な特徴から, この循環が太陽や高温星のエネルギー生成の問題の全ての要求を満たしていることが判る. ただし ε の計算に用いられる循環の周期は実質的に最も反応の緩やかな ${}^7\text{N}^{14}$ 反応の反応時間を用いている. しかし, この反応の確率は実験室での高エネルギー実験で得られる反応確率を (理論曲線に基づきながら) 恒星内部での低エネルギー状態まで外挿して求めた反応確率に依存している. 原子核実験で見られるあるエネルギー状態で反応確率が異常に高くなる共鳴現象が, もし未知の外挿域にあるとすれば, もっと起こり易い反応になるかも知れない. もしこのような事情から, 炭素循環の周期が次に緩やかな ${}^6\text{C}^{12}$ 反応に反応時間で決まることになれば ε は 10 倍も大きくなるであろう.

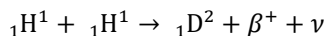
以下の理論では炭素循環が恒星の主要なエネルギー源の 1 つを与えることを認めて進めよう.

§ 8. 陽子-陽子反応

次に炭素循環と同じくらい重要なもう1つの核反応を考えよう。まず、前述の炭素循環が太陽以上の高温星のエネルギー源として十分であり、それが温度の高次 ($T^{18} \sim T^{20}$) に比例するという事実は、逆に考えると 2×10^7 K 程度よりずっと低温では余り有効ではないだろうということを示している。 2×10^7 K から 1.5×10^7 K まで低くなれば、 ϵ は $1/100$ 以下に小さくなってしまう。

例えば、Krueger 60 のような赤色矮星 (M dwarf) では M/R 値が太陽の約 $(1/2)$ である。従って (第7表の欄外)、 T_c が矢張り太陽の約 $(1/2)$ でなければならず、このため生成されるエネルギーは太陽の $0.000\ 001$ 倍程度でなければならないことになる。ところがこの恒星の観測光度はそれ程小さくはなく、太陽の 0.0015 倍である。このことから赤色矮星の光度は炭素循環が唯一のエネルギー源であるとした場合に期待される程低くはないと言える。

勿論この恒星が比較的大きい平均分子量を持つために温度が予想以上に高いこともあり得るが、とにかく、かなり低温でも有効に働いて炭素循環を補うような核反応が別にあるかどうかを調べることは有意義である。Bethe と Critchfield が示したように、このような過程は

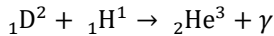


という反応で存在する。この反応では $Z_1 = Z_2 = 1$ のため貫入確率は炭素循環の場合より遥かに大きく (§7.3)、従って Q^2 の値 (§7.8) は、 ${}_7\text{N}^{14} + {}_1\text{H}^1$ 反応では $5070/T^{1/3}$ であったのに、この反応では $1126/T^{1/3}$ である。しかし反応全体の確率は、これが β 崩壊であるために著しく小さい。Bethe と Critchfield はこの反応の確率を計算したが、彼らの公式中の物理定数を最近の推定値で修正すれば、炭素循環の (§7.15) 式に対応する 1 gr 当たり毎秒起こる反応数は

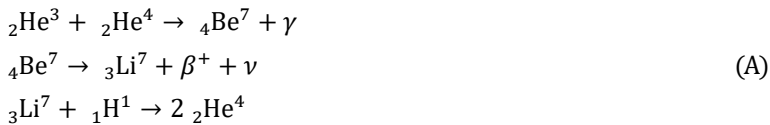
$$P = 2.3 \times 10^7 \rho X^2 (3380/T^{1/3}) \cdot \exp(-3380/T^{1/3}) \quad (1)$$

となる。この式によれば第10表の条件で H の平均寿命は、それぞれ 4.8×10^{10} 年、 2.4×10^{10} 年である。従ってこの過程では水素の燃焼は急速ではない。

この陽子-陽子反応で生じた重水素核 deutron ${}_1\text{D}^2$ は殆ど即刻、



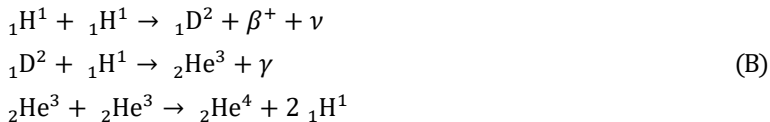
の反応で破壊してしまう。それは第 10 表に見られるように恒星の内部では、この反応は僅か数秒ほどの平均寿命しかないからである。生じた ${}_2\text{He}^3$ 核は ${}_3\text{Li}^4$ という安定核が存在しないために、陽子との反応が起こらずに安定である。この ${}_2\text{He}^3$ の形成に続く反応として 2 つの可能な反応がある



の反応と



の反応とである。系列(A)は最初 Bethe が得たが、その後、Fowler&Lauritsen によって両者の中(B)の方がずっと起こり易いことが指摘された。その理由は、後者が複合核の分裂に依存しているのに反して、前者は確率の小さい輻射捕獲を含んでいるからである。系列(B)の連鎖反応をまとめて書けば



Fowler&Lauritsen によれば、 ${}_2\text{He}^3 + {}_2\text{He}^3$ (B)反応の確率は ${}_2\text{He}^3 + {}_2\text{He}^4$ (A) 反応の確率の約 5×10^5 倍も大きいと推定される。ここで、 ${}_2\text{He}^3$ と ${}_2\text{He}^4$ との粒子密度の比が問題になってくる。反応確率が大きくてもその粒子が著しく少なくてはいけない。恒星中の、 ${}_2\text{He}^3$ の相対量は、諸反応の永年平衡から決ま

ってくる。例えば $T = 1.6 \times 10^7$ K, $\rho X = 120$ gr/cc に対して ${}_2\text{He}^3$ の相対量は陽子の約 10^{-5} 倍である。従って仮に ${}_2\text{He}^4$ が (数で) 水素の (1/10) もあるとしても ${}_2\text{He}^3 + {}_2\text{He}^3$ の反応は ${}_2\text{He}^3 + {}_2\text{He}^4$ 反応に比べて 400 倍も起こり易いことになる。他方(B)反応では 2 回の ${}_1\text{H}^1 + {}_1\text{H}^1$ 反応ごとにただ 1 回の割合で 4 個の水素原子が 1 個のヘリウム原子に変換される。従って ${}_1\text{H}^1 + {}_1\text{H}^1$, ${}_1\text{H}^1 + {}_1\text{D}^2$, ${}_2\text{He}^3 + {}_2\text{He}^3$ の反応で遊離されるエネルギーを E_1, E_2, E_3 とすれば 1 陽子-陽子反応当たり遊離されるエネルギーは $E_1 + E_2 + (1/2)E_3$ となるだろう。反応に含まれる核の質量の表から 1 陽子-陽子反応当たり遊離されるエネルギーが 14.01 mmu あるいは 2.09×10^{-5} erg であることが判る。従って陽子-陽子反応によるエネルギー生成法則の式は(1)から

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2.09 \times 10^{-5} P(2) \\ &= 481 \rho X^2 (3380/T^{1/3})^2 \cdot \exp(-3380/T^{1/3}) \text{ erg/gr} \cdot \text{sec} \end{aligned} \quad (2)$$

$T = 1.6 \times 10^7$ K, $\rho X = 120$ gr/cc に対して, この式は

$$\varepsilon = 12.1 \text{ erg/gr} \cdot \text{sec} \quad (2)$$

となる。このように恒星のエネルギー源として陽子-陽子反応は 1.6×10^7 K で既に炭素循環と同程度 (§ 7.18) 有効である。

巨星の問題を考えると, 今までと非常に異なる条件下にある。例えば Capella (α Aur) を考えると, この恒星の M/R は太陽の 0.27 倍であるのに, この星は $\varepsilon = 60$ erg/gr \cdot sec を生成している。超巨星となると条件はもっと悪い。従って巨星に対してはエネルギー生成の機構か, あるいは恒星の構造の何れかが主系列星と著しく異なっているに違いないと結論せざるを得ない。現在の一般的な傾向としては 2 つの中後者, 即ち恒星の構造が異なっているという可能性が考えられているが, 未解決の問題の 1 つである。

Chapt. 3. 恒星の組成

この章では、これまで概要を述べてきた理論を組み合わせて恒星の水素とヘリウムの相対量の知識がどうして得られるかを示そう。平衡方程式から導かれた質量－光度－半径の関係と、観測光度が既知の恒星エネルギー源（ここでは炭素循環）で説明されるという要求から、この目的のために必要な2式を与える。恒星の組成を推定する方法を次の計算例で示そう。

§ 9. 質量－光度－半径関係

前述のように太陽類似の主系列星に対しては、不透明度 κ の法則として Schwarzschild の近似 (§ 4.8) , 即ち

$$\kappa = 10^{25}(1 + X)(1 - X - Y)\rho^{0.75}T^{-3.5} \quad (1)$$

を用いるのが便利である。この近似に基づけば、今の議論に適切な恒星モデルは表 14.7; 14.8 の中で、“ $\alpha = 0.25$ ” と示した欄のものである。それに対応する質量－光度－半径関係は、(5.22) , (5.34) , 表 14.7 を参照して数値的に書けば

$$\begin{aligned} -5.5167 &= -30.726 + 0.0819 + 25 \\ &+ \log[(1 + X)(1 - X - Y)] + \log[LR^{1.25}/M^{5.75}\mu^{7.5}] \end{aligned} \quad (2)$$

である。この式の μ に(2.15)を代入すれば

$$\begin{aligned} \log[M^{5.75}/LR^{1.25}] \\ = -0.126 + \log[(1 + X)(1 - X - Y)(1.5X + 0.25Y + 0.5)^{7.5}] \end{aligned} \quad (3)$$

を得る。この式をもっと便利な形で書けば

$$\begin{aligned} (1 + X)(1 - X - Y)(0.75X + 0.125Y + 0.25)^{7.5} \\ = 7.41 \times 10^{-3}(M^{5.75}/LR^{1.25}) \end{aligned} \quad (4)$$

(2), (3), (4)式で, L, R, M は太陽単位で表わしてあることを留意せよ.

(4)式は L, R, M が既知の恒星に対しては, X と Y との間の1つの関係: 質量-光度-半径の関係を与え, このような関係を満たすことが平衡方程式によって要求されるのである. 太陽と Sirius A の場合に対して(4)式で表わされている X と Y との間の関係を図 14.7; 14.8 に示す.

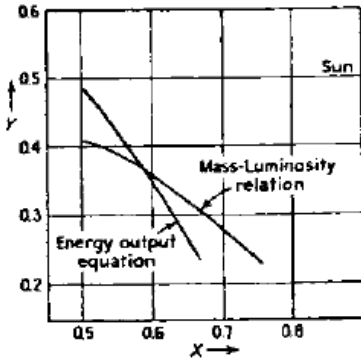


FIG. 14.7. The relation between the hydrogen (X) and the helium (Y) content in the sun required by the mass-luminosity-radius relation and the energy-output equation. It is seen that $X = 0.583$ and $Y = 0.362$ satisfy both relations.

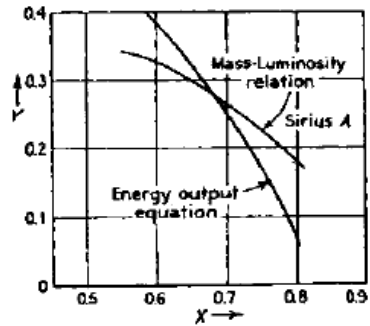


FIG. 14.8. The relation between the hydrogen (X) and the helium (Y) content in Sirius A required by the mass-luminosity-radius relation and the energy-output equation. It is seen that $X = 0.68$ and $Y = 0.28$ satisfy both relations.

§ 10. エネルギー放出の式

(§ 7.18)式によって、 2×10^7 K の温度では炭素循環は H および N の各 1 gr 当たり $246 \times (100/30) \sim 820$ erg/gr · sec のエネルギーを生成し、この温度ではエネルギー生成量が実質的に T^{18} に比例することを知った。われわれは実際 2×10^7 K 程度の温度を扱うわけだから (表 9 参照)，十分よい近似として炭素循環によるエネルギー遊離率を

$$\varepsilon = 1440 C_N (1 - X - Y) \rho X \{T / (2 \times 10^7)\}^{18} \text{ erg/gr} \cdot \text{sec} \quad (1)$$

と書くことができる。 C_N は H と He を除いた重元素 $(1 - X - Y)$ の中で N の占める質量による相対量である。

[(1)式の係数 1440 は表 10 に与えたデータには対応していない。これは $T = 2 \times 10^7$ K, $\rho X = 30$ gr の炭素循環に対する平均寿命の以前の古い推定値 (1.3×10^6 year) に対応している。この § での数値的な値は最近の断面積の値に合うように修正されていない。これらの新しい断面積に従うなら(1)式の係数は最初に述べたように 820 でなければならない。しかし、表 9 で示されているように太陽の中心におけるもう少し低い温度 (1.7×10^7 K) ではエネルギーの生成に陽子-陽子反応が実質的に寄与してくる。このことは (§ 7.18'), (§ 8.21)からも明らかである。従って、これらの特殊な計算を修正するほどの必要性もない]

(1)式は次のような形で書ける

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \rho T^{18}; \quad \varepsilon_0 = \{1440 C_N X (1 - X - Y) / (2 \times 10^7)^{18}\} \quad (2)$$

ε がこのように表わせる時、 L は (§ 5.11)により

$$L = 4\pi \varepsilon_0 \int_0^R \rho^2 T^{18} r^2 dr \quad (3)$$

で求められる。

ε が温度 T の非常に高冪に依存しているので対流核以外で生成されるエネルギーの割合は無視できる（これは最初点源モデルを用いたことの正当化である）。従って(3)の積分を $0 \leq r \leq r_i$ (r_i は対流核の半径) だけに限定することができ、また核の中では ρ が $T^{3/2}$ に比例することを思い出し

$$L = 4\pi\varepsilon_0\rho_c^2 T_c^{18} \int_0^{r_i} (T/T_c)^{21} r^2 dr \quad (4)$$

核の質量は類似の式

$$M(r_i) = 4\pi\rho_c^2 \int_0^{r_i} (T/T_c)^{3/2} r^2 dr \quad (5)$$

で与えられるので

$$\begin{aligned} L/M &= \varepsilon_0\rho_c T_c^{18} \\ &\times \left[\{M(r_i)/M\} \int_0^{r_i} (T/T_c)^{21} r^2 dr / \int_0^{r_i} (T/T_c)^{3/2} r^2 dr \right] \end{aligned} \quad (6)$$

と書くことができる。右辺の分子の integrand に入っている (T/T_c) の冪 21 はエネルギー生成の法則 $\varepsilon = \varepsilon_0\rho T^\nu$ の指数 ν によって決まる。今の場合では $\nu = 18$ である。[] の量は Schwartzschild によって $\alpha = 0.25$ を持つ点源モデルに対して計算されている。彼は $\nu = 15, 17, 19$ に対して [] 内の量がそれぞれ $1/41, 1/47, 1/54$ であることを見出だしている。従って $\nu = 18$ に対して

$$L/M = (\varepsilon_0/50.5)\rho_c T_c^{18} \quad (7)$$

今考えているモデルに対しては（表 7 を参照し）， M, R を太陽単位で表わし

$$\rho_c = 111.6(M/R^3), \quad T_c = 2.589 \times 10^7 \mu(M/R) \quad (8)$$

[前の式の導出：太陽の平均密度 $\bar{\rho} = 1.4109$ だから $\rho_c/\bar{\rho} = 79.1$ の関係から M, R を太陽単位で表わせば $\rho_c = 79.1 \times 1.4109(M/R^3)$]

さて(2), (7), (8)式を組み合わせれば

$$L/M = \{1.440C_N(1 - X - Y)X\} \\ \times \{111.6(M/R^3)\}\{1.295\mu(M/R)\}^{18} \{(M_\odot/R_\odot)/50.5\} \quad (9)$$

となる. この μ に(§ 2.15)式を代入すれば

$$(0.75X + 0.125Y + 0.25)^{18} / X(1 - X - Y) \\ = 0.666C_N(M^{20}/LR^{21}) \quad (10)$$

(10)式は L , M , R の知られている恒星に対して, X と Y との第 2 の関係を与える. 観測された光度が既知のエネルギー源で説明されねばならないので, この条件が満たされねばならない. この式をエネルギー放出の式と呼ぶことにしよう.

(10)式を用いるのに $C_N = 0.25$ を仮定しよう. これは恒星のスペクトルからの証拠によって導かれる炭素と窒素の和の相対量である. この値を恒星の内部に対して採用するという事は, 恒星全体としての炭素と窒素の“初めの”相対量が, 現在恒星の大気で見出だされるのと同じであったことを事実上仮定することになる. しかしながら, 炭素循環がある期間働けば炭素, 窒素およびその同位元素の相対量は永年平衡に調和するように修正されてくることに注意しなければならない. 例えば, 窒素と炭素とは(地球上や他の部分では, それはほぼ同量存在するのに), 対流核の中では 1.4×10^{-2} の比で存在することになるだろう. 後程この問題に戻ろう.

さて $C_N = 0.25$ を仮定すれば(10)式は

$$(0.75X + 0.125Y + 0.25)^{18} / X(1 - X - Y) \\ = 0.167(M^{20}/LR^{21}) \quad (11)$$

太陽と SiriusA の場合に対し(11)から要求される X と Y との関係が, 図 14.7 と 図 14.8 に一緒に示されている. この図から, 質量-光度-半径関係とエネル

ギー放出の式の両方が満たされるような X と Y を見出だし得ることが判る. この方法で決定される太陽と Sirius A の水素およびヘリウムの量は

太陽	$X = 0.593$	$Y = 0.362$	$1 - X - Y = 0.045$
Sirius A	$X = 0.68$	$Y = 0.28$	$1 - X - Y = 0.04$ (12)

上で用いた不透明度の法則の近似式や, 仮定した窒素の量や, ${}^7\text{N}^{14}$ 反応に対して採用した Γ の値などに含まれる不確かさ, これらは全て結果の X , Y の値に影響してくる. これらの不確かさを概略調べてみると (X と Y における不確かさは逆符号だが), 結果の相対量には $\pm 5\%$ の誤差がある. このような事実や, 又太陽と Sirius A との間にあるに違いないモデルの明らかな変化を考え合わせると, (12)で示される両星の組成の相異が真実かどうか決めるのは難しい. 今の場合としては, 太陽と Sirius A が何れも, ここの議論の限界内で

$$X = 0.65 \pm 0.05; \quad Y = 0.31 \mp 0.05; \quad 1 - X - Y = 0.04 \pm 0.01 \quad (13)$$

としか結論できない.

恒星の内部やエネルギー生成の考察から導かれた組成(13)は恒星のスペクトル解析からの結果と驚くほどの良い一致を示している. 後者では, 恒星の大気で

$$X = 0.70 \pm 0.05; \quad Y = 0.28 \mp 0.05; \quad 1 - X - Y = 0.02 \pm 0.05 \quad (14)$$

を示している.

以上の計算が行なわれた当時は, 導かれる密度, 温度の条件 (表9の太陽の欄参照) のもとで陽子-陽子反応が恒星のエネルギー源としてほぼ同程度に, 炭素循環に匹敵することが判っていないなかった [(§7.18), (§8.2)参照]. このことを最初に指摘したのは1950年, Epstein と Oke であった. Epstein はそれ以来, 炭素循環と陽子-陽子反応の両方のエネルギー源を考慮に入れて太陽に対するモデルを計算した. 太陽に対する彼の暫定的な結果は

$$X = 0.82, Y = 0.17, T_c = 1.5 \times 10^7 \text{K}, \rho_c = 150 \text{ gr/cc} \quad (15)$$

である。Epstein はまた、もし対流核が存在するならば質量の8%以下を含み、恒星の半径の10%以下を占めるだろうということや、また僅か30%のエネルギーだけが対流核で作られるだろうということを見出だしている。(13)式と(14)式の“一致”から得られる結論は、今までの§で述べた理論が、これらの恒星に対して、まあまあ正しい方向に進んでいるということである。特に炭素循環は、太陽以上に高温な主系列星の主要なエネルギー源と考えて差し支えないだろう。この結論に達したことは重要なことであるが、幾分注意深い考察を要する理論の状況に注意しなければならない。それは前述の仮定、即ち平均分子量 μ および水素、ヘリウム量が内部で一定であるとした仮定である。この μ , X , Y 一定の仮定は“詳細な”化学組成もまた恒星内部で一様であるかどうかという更に大きい問題に関係してくる。

§ 11. 恒星内部の物質の混合

前節の終わりで生じた問題を解決するには、恒星の内部の物質がどの範囲に亘って、どれ程有効に混合されているかを調べなければならない。

対流核内の物質は如何なる場合でも対流によって十分混合されており、核内部の組成は隅々まで一様であることは明らかである。恒星の中心部で最も有効に働いている炭素循環は、中心部の水素を最も急速に燃焼してしまう。少なくとも、この対流核内で持続する限りの水素の連続的な補給を保つのにこの対流に依存しているので、核内の一様性は重要である。

対流核の外部、即ち **envelope** では輻射平衡が成立し、対流は起こらない。従って最初の **envelope** 物質が一様組成であったとすれば、非一様性を生ずる原因は熱拡散 **thermal diffusion** 以外にはない。しかし、昔 **Eddington** が見積もった結果では、太陽での熱拡散は $10^{14} \sim 10^{15}$ 年もかかり、長過ぎて問題にはならない。熱拡散の効果は無視される。

次に核の物質と **envelope** の物質とが相互に混合される可能性を考える。それは内部に大尺度の還流がある場合にのみ期待できる。太陽の自転で観測される赤道加速のような微分自転によって、子午面内に還流が起こるかも知れない可能性を **Eddington**, **Rosseland**, **Randers** 等が示唆している。しかしその当時の彼らの考察には **Poincare** の定理からの結果、即ち対流核は如何なる場合でも剛体のように自転するという事実を考慮していない。もし核が剛体のように自転するとすれば還流は、たとえ存在しても図のような **pattern** になる筈であって、今考えているような大尺度の流れは、**envelope** の物質をよく混合することはできて、**envelope** の物質と核の物質とを相互に混合するには役立たない。

以上のことから、今の条件のもとで最良の基本的な仮定は次のようなものであると思われる。

(a) 最初、恒星ができた時、組成は一様であった。

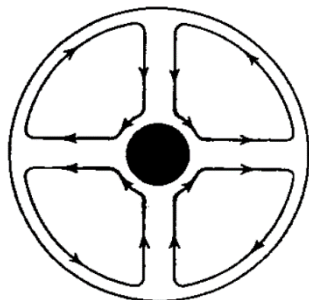


FIG. 14.9. The probable pattern of circulatory currents in a rotating star. As the convective core must rotate like a rigid body, the currents are not likely to intermix the matter in the core and in the envelope.

- (b) 対流核と輻射 envelope との物質は、相互に混合しない.
- (c) 対流核内の物質は十分に混合されている.
- (d) envelope では、 X , Y , μ は最初のまま変わっていない.
- (e) 核と envelope の間に何か組成の違いがあるならば、核反応の結果である.

§ 12. 永年平衡 Secular equilibrium

前節の最後に述べた対流核と輻射 envelope との間に組成の違いがあるかも知れないという可能性は、詳しく考察すれば、大抵の恒星できっと起こっているに違いない。何故なら炭素循環が働いている恒星の対流核では ${}_6\text{C}^{12}$, ${}_6\text{C}^{13}$, ${}_7\text{N}^{14}$, ${}_7\text{N}^{15}$ などの原子核は永年平衡の状態にあるに違いないからである。即ち、それらの原子核はそれぞれの平均寿命に比例する数で存在するに違いない。太陽の内部での条件では、それらは次のような比になる。表 14.10 から

$$\begin{aligned}
 T &= 2 \times 10^7 \text{ K}, \quad \rho X = 30 \text{ gr/cc とすれば} \\
 {}_7\text{N}^{14} : {}_7\text{N}^{15} : {}_6\text{C}^{12} : {}_6\text{C}^{13} \\
 &= 2.2 \times 10^6 : 520 : 1.2 \times 10^5 : < 2.8 \times 10^4 \\
 &= 1 : 2.4 \times 10^{-4} : 5 \times 10^{-2} : < 1.3 \times 10^{-2}
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 T &= 1.6 \times 10^7 \text{ K}, \quad \rho X = 120 \text{ gr/cc とすれば} \\
 {}_7\text{N}^{14} : {}_7\text{N}^{15} : {}_6\text{C}^{12} : {}_6\text{C}^{13} \\
 &= 4.1 \times 10^7 : 9.5 \times 10^3 : 1.3 \times 10^6 : < 2.5 \times 10^5 \\
 &= 1 : 2.3 \times 10^{-4} : 3 \times 10^{-2} : < 6 \times 10^{-3}
 \end{aligned} \tag{1}$$

このような比で存在するに違いない。これらを地球上その他で見られる比

$$\begin{aligned}
 {}_7\text{N}^{14} : {}_7\text{N}^{15} : {}_6\text{C}^{12} : {}_6\text{C}^{13} \\
 = 1 : 4 \times 10^{-3} : 1 : 10^{-2}
 \end{aligned} \tag{2}$$

と比較してみよう。

更に ${}_1\text{D}^2$, ${}_2\text{He}^3$, ${}_3\text{Li}^6$, ${}_3\text{Li}^7$, ${}_4\text{Be}^9$, ${}_5\text{B}^{10}$, ${}_5\text{B}^{11}$ などの軽い原子核は相互に変換される原子核反応で平均寿命が極めて短いため、主系列星の内部では実際に存在しない筈だということを知っているが、これらの元素の幾つかは同じ恒星の大気では明らかに存在することが検出されている。

このように核の化学組成が、詳しく言えば、envelope のものと異なっている

と結論せざるを得ない. そして“原子核反応の time scale”として推定された 4.5×10^9 年 (§ 6.15) という観点からすれば, この期間中に炭素循環は何回も循環するので, X, Y 値が核と envelope とで異なっている可能性も考慮しなければならない. しかし, この相異が原子核反応の結果であるとすれば

$$X_e + Y_e = X_c + Y_c ; \quad X_e > X_c ; \quad Y_e < Y_c \quad (3)$$

でなければならない. e, c はそれぞれ envelope, 核 core を示している. このように水素, ヘリウム量が異なれば平均分子量 μ (2.15) も当然異なってくる.

このような対流 core と輻射 envelope との境界面での μ の不連続は, 境界面の物理条件に関して興味ある問題を提供する. 恒星の内部では明らかに圧力 P と温度 T は連続的でなければならないから, $p_g = \rho kT / \mu H$ により, μ の不連続は密度 ρ の不連続を意味し, 境界面 ($r = r_i$) の両側 r_{i-o} (core 側), r_{i+o} (envelope 側) での不連続の比は

$$\rho(r_{i+o}) / \rho(r_{i-o}) = \mu(r_{i+o}) / \mu(r_{i-o}) \quad (4)$$

となっている.

更にこの境界では Hoyle & Lyttleton が指摘した条件がある. それは(3.12)式から出てくるもので, その式によれば

$$\kappa \{d \log P / d \log T\} = 4 \{ \bar{\kappa} \bar{\eta}(r) / \eta(r) \} \quad (5)$$

この式の右辺は $\eta(r)$, $\bar{\kappa} \bar{\eta}(r)$ の性質から普通は不連続にならない. 唯一の例外は, 恒星の内部のどこかの点の面上 (実質的には, ある薄い球面層) で, エネルギーが非常に効果的に生成され, この点で $L(r)$ が不連続になる場合に限って起こる (後程, この不連続の可能性も出てくるが). これまでの話ではそのような $L(r)$ の不連続を想定してないので, 左辺の $\kappa d \log P / d \log T$ は境界面で連続でなければならない. (§ 5.5) で定義した有効ポリトロプ指数 effective polytropic index n_{eff} を用いれば, $d \log P / d \log T = (n_{\text{eff}} + 1)$ だから, 境界面で

の $\kappa d \log P / d \log T$ の連続性は

$$[\kappa(n_{\text{eff}} + 1)]_{r_{i+o}} = [\kappa(n_{\text{eff}} + 1)]_{r_{i-o}} \quad (6)$$

と表わせる。(§5.8), (§5.4)の不透明度 opacity κ の表示を用いると, この条件は境界面で X, Y, μ が不連続になっても

$$(n_{\text{eff}} + 1) \mu^{1-\alpha} (1 + X)(1 - X - Y) \quad (7)$$

は連続だということになる.

対流 core と輻射 envelope との境界面で(3), (4), (6)の条件を矛盾なく満たすような恒星モデルを作る問題は Ledoux によって見事に解決されたが, それは幾つかのデリケートな問題を提起する. 彼の考えは幾分複雑過ぎて, ここでは述べられないが, 非常に重要なので, 結果だけを述べておこう.

Ledoux は不透明度の Kramers の法則

$$\kappa = 10^{25} (1 + X)(1 - X - Y) \rho T^{-3.5} \quad (8)$$

を仮定して質量-光度関係, エネルギー生成の両方程式を満たすような太陽のモデルを計算したが, それは次のような性質を持っている.

輻射 envelope では $X_e = 0.56, Y_e = 0.40$ である.

対流 core は質量の 15.5% を含み, 2 つの部分から成る. 中心部は質量の 15.1% を含み, そこでは $X_c = 0.26, Y_c = 0.70$ である.

遷移領域は質量の 0.4% を含み, ここでは μ が徐々に減少する. 境界面のすぐ内側とすぐ外側の μ の値の比は 1.345 である. core と envelope の主要部に対する μ の値の比は $\mu_c / \mu_e = 1.352$ である.

この Ledoux のモデルで興味があるのは次の点である. もし, 最初に, core と envelope の水素とヘリウムの量が同じであったと考えれば, 太陽はその過去に

において core の水素量が 56 % から 26 % に減少するだけ，H→He 変換をしたのだと結論せねばならない．この減少は

$$t = (M_{\odot}/L_{\odot}) \times 0.155 \times (0.0071c^2) \times (0.56 - 0.26) \\ \sim 5 \times 10^9 \text{ year} \quad (9)$$

の期間で起こったことになる．これは文字通り太陽の年齢である．

勿論 Ledoux の作業モデルの示す特別な数値を余り信用し過ぎてはいけないのは明らかである．彼の計算での興味は，考え得るタイム・スケールの中に core と envelope との水素，ヘリウム量にかなりの変化が起こり得るという事実にあるので，このことは，実際的には，一般的な基礎の上に予想されたことであった (§6 参照)．従って Ledoux の計算が修正され，他の恒星にまで拡張されることが大切で，そうして初めて主系列星全体が同年齢であるか否かを確定できるようになるのである．

§ 13. 低温主系列星と巨星に関する備考

これまでの議論はエネルギーを炭素循環で生成している主系列星を対象としてきた。主系列星でもっと低温な恒星や、あるいは巨星となると条件はずっと違ってきて、それらについての確定的な性質は、まだ未知なことも多い。そこで二三の一般的な事柄だけを述べておこう。

先ず M 型矮星を考えると、それはエネルギーの多くを陽子-陽子反応で生成していることを既に述べた。しかしこれらの恒星の中で、エネルギー生成について陽子-陽子反応と炭素循環の相対的な重要さは、それぞれの恒星の平均分子量 μ によって著しく変わってくる。R.H.Aller の研究によれば、まだ両者の役割の比率を断定することはできない。例えば、彼は Krueger 60 に対して

$X=0.11, Y=0.64$ で炭素循環がエネルギーの 60% を供給し

$X=0.34, Y=0.64$ で陽子-陽子反応がエネルギーの殆どを供給するが、何れも解になり得ることを示している。しかもこの結論さえまだ最終的なものとは言えない。何故なら、このような比較的低温高密度の条件では不透明度 κ の知識がまだ極めて不確かなためである。しかし原理的にはこれらの恒星の問題解決もそう困難ではないと考えられる。

巨星について考えれば全く異なる条件が出てくる。確信を持って言い得ることは、「もし巨星の内部構造、即ち密度や温度の分布が主系列星と同じだと仮定すれば、その大きい観測光度をうまく説明できる既知のエネルギー源はない」と言うことである。

現在、われわれが考えている巨星は、対流核の水素が使い果たされそうになって、そのため中心領域で密度の急な傾斜が起こっている恒星進化の 1 段階であると言うことである。

Chapt. 4. 白色矮星の構造

§ 14. 縮退電子ガスの状態方程式

これまでの恒星構造の議論は理想気体の状態方程式（ボイル・シャルル Boyle-Charles の式）

$$p = (k/\mu H)\rho T \quad (1)$$

が妥当な第 1 近似として成り立つという仮定の下に進んできた。しかし、平均密度が $10^5 \sim 10^6$ gr/cc の範囲に達する白色矮星を考えるようになれば、この仮定は成り立たなくなる。このような密度では物質は文字通り潰れてしまって完全電離の状態にある。従って、この条件の下では、古典的気体運動論に基づいて、

(1) 原子核や電子の体積が有限であるという点から、あるいは

(2) 帯電粒子間の静電引力または反発力の点から、

理想気体の法則からのずれが予想される。しかし、原子核や電子の半径が 10^{-13} cm (1 fermi) という小さいものだから、(1) から予想される気体法則の不完全さは 10^8 gr/cc ほどの密度でも無視できることが確かめられる。また (2) から生ずるずれもそう重要ではないことが判る。

しかしながら、R. H. Fowler が最初に指摘したように、量子論や Pauli の禁制原理による制限から、古典論の気体法則からのずれの重大な原因が生ずる。周知のように Pauli の禁制原理は原子内の 2 つの電子が量子数の同じ組合せを持つことを許さない。しかし量子数は原子内の束縛電子と同様に自由電子についても割当てることができ、Pauli の原理は矢張り量子数の同じ組を持つ 2 つの自由電子を禁止する。与えられた容積に閉じ込められた電子に対して、量子論は 1 cc 当たり、運動量 ($p, p + dp$) の範囲に

$$(2/h^3)4\pi p^2 dp \quad (2)$$

個の状態を割当てる。量子状態の数(2)は次のように理解してよい。6次元の位相空間を体積 h^3 の細胞に分割し、各細胞には、スピン spin の向きの異なる 2 個の状態が許される。

(2)式は運動量 ($p, p + dp$) の自由電子に対して許される状態の数が、これだけしかないことを示しているので、Pauli の禁制原理によって

$$N(p)dp \leq (2/h^3)4\pi p^2 dp \quad (3)$$

でなければならない。ここで、 $N(p)dp$ は運動量 ($p, p + dp$) を持つ電子の 1 cc 当たりの数である。他方、状態方程式(1)の基礎になっている Maxwell の速度分布の法則は、運動量 ($p, p + dp$) の範囲の電子の数が、1 cc 中の電子総数 N_e に対して

$$N(p)dp = \{N_e / (2\pi mkT)^{3/2}\} \cdot \exp(-p^2/2mkT) \cdot 4\pi p^2 dp \quad (4)$$

であることを予想させる。(3)、(4)を比較して、もし

$$N_e / (2\pi mkT)^{3/2} > 2/h^3 \quad (5)$$

となるほど N_e が大きくなれば、Pauli の原理に背くことになる。今、電子 1 個当たりの分子量 μ_e を用いて

$$N_e = \rho / \mu_e H \quad (6)$$

と置けば(5)の不等式は

$$\rho > 2 \cdot \{(2\pi mkT)^{3/2} / h^3\} \mu_e H = 8.1 \times 10^{-9} \mu_e T^{3/2} \quad (7)$$

と表わせる。これにより $\mu_e = 2$, $T = 10^6$ K に対して、密度 $\rho > 16$ gr/cc と
な

る時に Maxwell 分布(4), 従って気体法則(1)からのずれを確実に予想しなければならない. 白色矮星内に見られるもっと大きい密度に対しては, それに応じて理想気体の状態方程式からの, もっと大きいずれを予想しなければならない. これが前述の Fowler の指摘である.

ρ が(7)式の限界より著しく大きくなる時には, 図 14.10 から容易に判るように, そこに示された形の分布が実現する. 即ち, ある p_0 より小さい p に対して

$$N(p) \sim (2/h^3)4\pi p^2 \quad (p < p_0) \quad (8)$$

p_0 を越える p に対しては指数的に減少してしまう. 点線で示された Maxwell 尾部が全電子中に占める割合は, 温度一定で密度が次第に増大するにつれて次第に小さくなるだろうと考えられる. 高密度 (あるいはゼロ温度) の極限では

$$\begin{aligned} N(p) &= (2/h^3)4\pi p^2 & (p \leq p_0) \\ N(p) &= 0 & (p > p_0) \end{aligned} \quad (9)$$

の分布が実現すると予想される. (7)の不等式が強い禁制である限り, 分布関数のこの極限形(9)が妥当な第1近似を与えると想像してよい.

$\rho \gg 8.1 \times 10^{-9} \mu_e T^{3/2}$ で分布関数(9)がよい近似である場合に, 電子気体は Fermi-Dirac 統計の意味で高度に縮退していると言う.

完全に縮退した電子気体に対して p の最大値 p_0 は

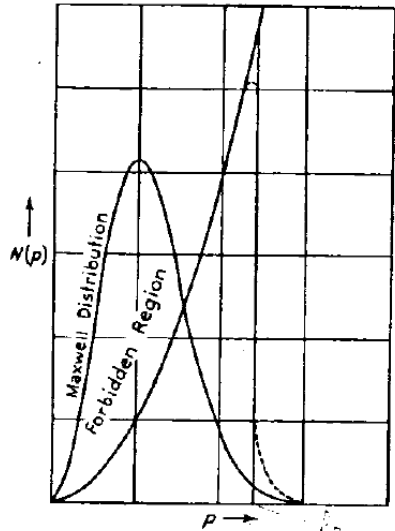


FIG. 14.10. Illustrating how, at large densities, the Maxwell distribution will violate the Pauli principle. The nature of the distribution which will be realized under these conditions is shown.

$$N_e = \int_0^{p_0} N(p) dp = (2/h^3) \int_0^{p_0} 4\pi p^2 dp = (8\pi/3h^3) p_0^3 \quad (10)$$

によって電子の粒子密度 N_e と関係している。 p_0 は時に Femi threshold (閾値) と呼ばれる。

白色矮星内では 10^5 gr/cc を越える密度に達するので、内部の電子気体は上記の意味で高度に縮退していることが予想される。しかし天体物理学で考慮すべき1つの重要な要素がある。それは電子が白色矮星内でのように高密度で縮退する時、電子の相当数は光速に匹敵する速度を持つことになると言うことである。これは次のようにして確かめられる。(6), (10)により

$$p_0/mc = \{(3/8\pi)N_e h^3\}^{1/3} (1/mc) \sim 10^{-2} \mu_e^{-1/3} \rho^{1/3} \quad (11)$$

$\rho \sim 10^6$ 程度の密度で $p_0 \sim mc$ となるが、相対性理論から電子の速度 v と運動量 p との関係が

$$p = mv / \{1 - (v/c)^2\}^{1/2} \quad (12)$$

で与えられるので、 $p_0 \sim mc$ は $v_0 \sim 0.7c$ の場合に相当する。更に高密度では、分布関数(9)の形のため、相対論的速度で運動する電子の割合は急激に増大する。縮退気体における圧力、密度関係式を導く場合に注意すべき重要な要素である。

縮退気体内の圧力を計算するのに定義によって圧力とは気体内の単位面積を通過して運ばれる運動量の割合であることを思い出そう。従って全く一般的に

$$P = (1/3) \int_0^\infty N(p) p v_p dp \quad (13)$$

が得られる、ここで v_p は運動量 p に対応する速度である。速度が光速に近付いていることを予想し、特殊相対性理論に従って質量の変化を考慮し

$$v_p = (p/m) [1 / \{1 + (p/mc)^2\}^{1/2}] \quad (14)$$

と書かねばならない. (9), (13), (14)を組み合わせて, 今の場合に対して

$$P = (8\pi/3mh^3) \int_0^{p_0} [p^4/\{1 + (p/mc)^2\}^{1/2}] dp \quad (15)$$

を得る. 右辺の積分は初等的なもので, 積分すれば P を

$$P = A \cdot f(x) \quad (16)$$

の形で表わせる. ここで

$$\begin{aligned} A &= \pi m^4 c^5 / 3h^3 = 6.01 \times 10^{22}; \quad x = p_0/mc \\ f(x) &= x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3 \cdot \sinh^{-1} x \end{aligned} \quad (17)$$

関数 $f(x)$ は $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ に対して次の漸近形をとる.

$$\begin{aligned} f(x) &= (8/5)x^5 + O(x^7) \quad (x \rightarrow 0) \\ f(x) &= 2x^4 + O(x^2) \quad (x \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (18)$$

パラメータ x により (6), (10) を用いて密度 ρ を次のように表わせる.

$$\rho = Bx^3 \quad (19)$$

但し

$$B = (8\pi m^3 c^3 / 3h^3) \mu_e H = 9.82 \times 10^5 \mu_e \quad (20)$$

(16), (19) は高度に縮退した電子気体の状態方程式をパラメトリックに表現している. $f(x)$ の漸近形 (18) から判るように, P , ρ 関係は

低密度 ($\rho < 10^6 \mu_e \text{ gr/cc}$) で $P \propto \rho^{5/3}$ 法則 から
高密度 ($\rho > 10^6 \mu_e \text{ gr/cc}$) で $P \propto \rho^{4/3}$ 法則 まで
変わることが判る.

§ 15. 白色矮星の構造

自己の重力の下に平衡にある高度に縮退した物質は、白色矮星の構造にとって非常によく第1近似を与えるようである。従って完全に縮退した恒星の構造を考察することによって、これらの天体の研究を始めよう。

自己重力の下に平衡にある物質の分布を決定する式は既に述べた(1. 3), (1. 4)式であり、両者を組合わせて1つの式にすると

$$(1/r^2)(d/dr)\{(r^2/\rho)(dP/dr)\} = -4\pi G\rho \quad (1)$$

と書ける。この P , ρ に(14.16), (14.19)を代入して解かねばならないが、それは中心において定められた密度に対応し、また更に $r = 0$ で $M(r) = 0$ (あるいは同じことだが $dP/dr = 0$) の条件を満たすだろう。

この際、われわれは重粒子 (即ち、核) による圧力への寄与を無視している。これは電子が縮退しているという事実のために妥当なのである。即ち、このことは縮退状態方程式で与えられる圧力が $N_e kT$ を遥かに上回り、そして核によって及ぼされる圧力が高々 $N_e kT$ に等しくなり得ることを意味している。(14.16), (14.19)式の P , ρ を(1)に代入すると

$$(A/B)(1/r^2)(d/dr)[(r^2/x^3)\{df(x)/dr\}] = -4\pi GBx^3 \quad (2)$$

となるが、 $f(x)$ の定義(14.17)から容易に

$$\begin{aligned} (1/x^3)\{df(x)/dr\} &= \{8x/(x^2 + 1)^{1/2}\} \cdot (dx/dr) \\ &= 8(d/dr)(x^2 + 1)^{1/2} \end{aligned} \quad (3)$$

が計算できるので、(2)式は次のように書き替えられる

$$(1/r^2)(d/dr)[r^2(d/dr)(x^2 + 1)^{1/2}] = -(\pi GB^2/2A)x^3 \quad (4)$$

ここで変数変換

$$\begin{aligned}
 r &= \alpha\eta = (2A/\pi G)^{1/2}(\eta/By_0) = (7.71 \times 10^8 \text{ cm}/\mu_e y_0) \cdot \eta \\
 y &= (x^2 + 1)^{1/2} = \phi(x_0^2 + 1)^{1/2} = \phi y_0 \quad (x_0 = \text{const})
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

によって変数 r , x を η , ϕ に変換すれば(4)式は

$$(1/\eta^2)(d/d\eta)\{\eta^2(d\phi/d\eta)\} = -\{\phi^2 - (1/y_0^2)\}^{3/2}
 \tag{6}$$

となる. 定義により

$$\rho = Bx^3 = B(y^2 - 1)^{3/2} = By_0^3\{\phi^2 - (1/y_0^2)\}^{3/2}
 \tag{7}$$

が得られる. もし

$$\rho_c = B(y_0^2 - 1)^{3/2} = Bx_0^2
 \tag{8}$$

が中心密度を表わすものとすれば, われわれは(6)式を境界条件

$$\phi = 1; \quad d\phi/d\eta = 0 \quad (\text{at } \eta = 0)
 \tag{9}$$

で解かねばならない. 特定の y_0 の値の各々に対して(従って, 決められた中心密度 ρ_c の各々に対して)このような境界条件を満たす(6)の解 $\phi(\eta)$ は唯一つ存在する.

恒星の表面の境界は密度 $\rho = 0$ の所であり, η_1 が表面を表わすとすれば, (7)式より

$$\phi(\eta_1) = 1/y_0
 \tag{10}$$

である. このような構造の恒星の質量は(5), (7)を用いて

$$\begin{aligned}
M &= 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr = 4\pi\alpha^3 \int_0^{\eta_1} \rho \eta^2 d\eta \\
&= 4\pi\alpha^3 y_0^3 B \int_0^{\eta_1} \{\phi^2 - (1/y_0^2)\}^{3/2} \eta^2 d\eta
\end{aligned} \tag{11}$$

で与えられる。この式は(6)を用いて簡単になり

$$\begin{aligned}
M &= -4\pi\alpha^3 y_0^3 B \int_0^{\eta_1} (d/d\eta)\{\eta^2(d\phi/d\eta)\}d\eta \\
&= -4\pi\alpha^3 y_0^3 B \{\eta^2(d\phi/d\eta)\}_{\eta=\eta_1}
\end{aligned} \tag{12}$$

最後に(5)式により α を代入し

$$M = -4\pi(2A/\pi G)^{3/2} \cdot (1/B^2)\{\eta^2(d\phi/d\eta)\}_{\eta=\eta_1} \tag{13}$$

を得る。従って決まった中心密度を持つ構造は決まった質量を持つことになる。

(5), (6), (9), (13)式から $\rho_c \rightarrow \infty$ の時, $y_0 \rightarrow \infty$, $\phi \rightarrow$ 唯一の極限值, $M \rightarrow$ 唯一の極限值, $R \rightarrow 0$ となることが導ける。このことは限界質量の存在を確定する。

以上から、任意に与えられた中心密度 ρ_c に対して、ある決まった質量と半径の唯一の構造が存在することが判る。このようにして構成された内部構造の性質が表 14.12 に与えられており、更に図 14.11, 図 14.12 に図示されている。

完全に縮退した恒星の内部構造の密度と半径は、白色矮星を説明するのに丁度要求される程度であることが判る。

多くの問題の中で、完全縮退の恒星構造の最重要な性質は、それらの質量に上限が存在することである。この質量は

$$M_3 = 5.756\mu_e^{-2}M_\odot \tag{14}$$

で与えられる。縮退物質の状態方程式は厳密に言えば、この限界質量に対して半径は 0 ということになる。しかし、勿論、もし M_3 より僅かに小さい質量から出発して、例えば“外部から”それに物質を注ぎ込んで質量を次第に増してゆくとした場合、実際に半径 0 が実現するという事は示唆されない。原子核

z

TABLE 14.12. THE PHYSICAL CHARACTERISTICS OF COMPLETELY DEGENERATE CONFIGURATIONS†

$\frac{M}{\odot} \mu_e^2$	$\rho_c \mu_e^{-1}, \text{ gm/cm}^3$	$\bar{\rho} \mu_e^{-1}, \text{ gm/cm}^3$	$R \mu_e, \text{ cm}$
5.756	∞	∞	0
5.753	9.82×10^{11}	2.00×10^{10}	5.14×10^7
5.748	2.48×10^{11}	5.33×10^9	7.99×10^7
5.740	8.78×10^{10}	2.00×10^9	1.11×10^8
5.725	3.10×10^{10}	7.62×10^8	1.53×10^8
5.682	7.83×10^9	2.21×10^8	2.30×10^8
5.615	2.76×10^9	8.92×10^7	3.10×10^8
5.51	9.85×10^8	3.70×10^7	4.13×10^8
5.32	3.37×10^8	1.57×10^7	5.44×10^8
4.87	8.13×10^7	5.08×10^6	7.69×10^8
4.33	2.65×10^7	2.10×10^6	9.92×10^8
3.54	7.85×10^6	7.9×10^5	1.29×10^9
2.95	3.50×10^6	4.04×10^5	1.51×10^9
2.45	1.80×10^6	2.29×10^5	1.72×10^9
2.02	9.82×10^5	1.34×10^5	1.93×10^9
1.62	5.34×10^5	7.7×10^4	2.15×10^9
0.88	1.23×10^5	1.92×10^4	2.79×10^9
0	0	0	∞

† The entries for $(M/\odot)\mu_e^2 = 5.51$ and smaller values are taken from S. Chandrasekhar, *M. N.*, **96**, 208 (1935); these were obtained from a direct integration of the basic differential equation governing these distributions of matter [see Mathematical Notes VII, Eq. (240)]. The entries for $(M/\odot)\mu_e^2 = 5.753$ to 5.615 (inclusive) are taken from a paper by A. Reiz [*Ap. J.*, **109**, 303 (1949)] in which a perturbation theory for configurations near the limiting mass is worked out.

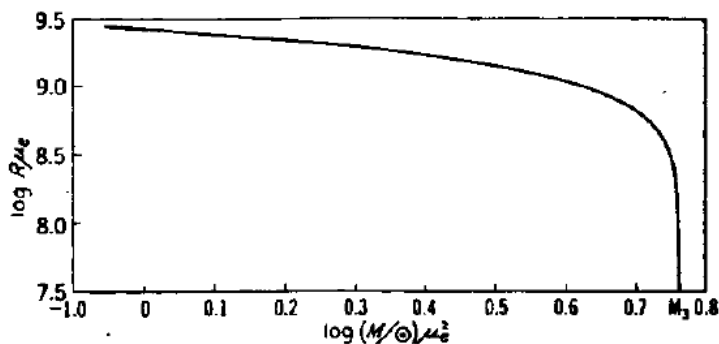


FIG. 14.11. The mass-radius relation for completely degenerate configurations.

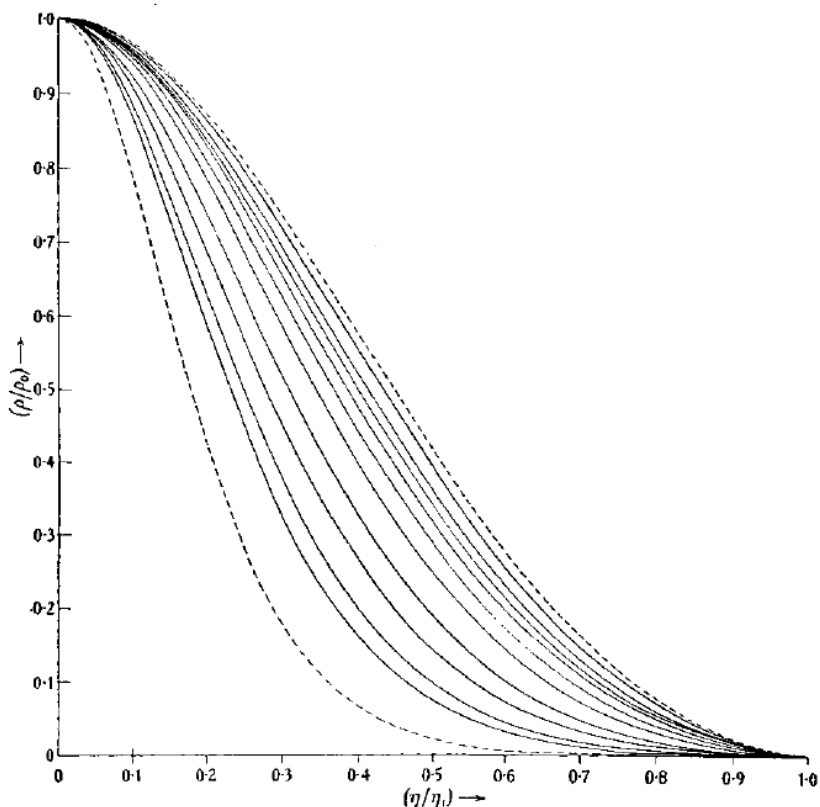


FIG. 14.12. The relative density distributions in the completely degenerate configurations. The upper dotted curve gives the distribution for the configuration of zero mass, and the lower dotted curve gives the corresponding distribution in the limiting mass M_3 . The inner curves represent the density distributions for the masses $(M/\odot)\mu_e^2 = 5.51, 5.32, 4.87, 4.33, 3.54, 2.95, 2.45, 2.02, 1.62,$ and $0.88,$ respectively, of Table 14.12.

のものの密度 ($\sim 10^{13}$ gr/cc) に近付くことが、他に何もなくても、このようなことが起こるのを妨げるし、そういうことは起こりそうにない。しかし、表 14.12 を見れば、 M_3 と僅か 1% しか違わない質量の中でさえ核の密度に達しないことが判る。従って、図 14.11 に示される質量—半径関係からは認め得る程のずれは予想できない。

さて、白色矮星が水素を全く含むことができず、 $\mu_e = 2$ であると信じ得る

理由を示そう. この μ_e に対して限界質量は

$$M_3 = 1.44M_{\odot} \quad (\text{for } \mu_e = 2) \quad (15)$$

である.

現実の白色矮星を考察しようとする場合, 先ず, それらを完全縮退した恒星構造だと見做すことが, どの程度に良い近似であるかを調べねばならない. この目的のために, 白色矮星の内部に入るとつれて温度の増大する割合を計算し, また気体状 *envelope* の広がりやを決定しなければならない. これらの恒星の大気に働く重力が非常に強いので, 密度は温度に比べて極めて急速に増大してゆくので, 恒星内部にそれ程深く入り込まなくても, 理想気体の状態方程式で得られる圧力は縮退状態方程式で得られる圧力よりも小さくなってしまふ. このことは縮退が全く急激に始まることを意味している. そして, 一旦縮退が起こってしまえば, その物質は極めて高度な熱伝導体となり, また同時に輻射に対しても非常に透明になる. その結果, 恒星の質量の大部分を通じて温度はほぼ一定になる. Marschak & Schatzman により, 白色矮星の内部の温度が $10^7 \sim 1.5 \times 10^7$ K 近くに違いないと推定されているが, このような指摘は全て, われわれが完全縮退の恒星構造を白色矮星のかなり正確な記述だと見做していることを裏付けている.

理論と観測との比較をするに当たって, 当然, 理論の最も著しい予想である限界質量の存在と, (質量が増大すると半径が減少するという) 特異な質量-半径関係の確認を探ることになる.

Kuiper や Luyten の近年に発見した新しい白色矮星の数は極めて多いのにも関わらず, これらの天体の純粋に観測的な質量-半径関係の決定はまだ存在しない. しかし利用できる証拠から明らかに指摘できることは白色矮星の間で観測された平均密度の範囲が $10^5 \sim 10^8$ gr/cc, 即ち因子にして 10^3 倍の範囲だということである. これから半径では 10 倍の因子の範囲があるようである.

さて限界質量の予想は, 相対論的な速度に伴う質量の変化を含むことによるもので, それによって状態方程式は低密度での $\rho^{5/3}$ 法則から, 高密度での $\rho^{4/3}$ 法則まで変わる (ここの高密度, 低密度は 10^6 gr/cc を規準にしての意味).

もし相対論的な効果を考慮しなければ、全ての密度に対して $\rho^{5/3}$ 法則が正確に成り立つことが見出だせる筈である。そして(14.16), (14.19)の法則の代わりにこの法則を仮定するならば、図 14.11 で図示された質量—半径関係の代わりに

$$\log R = -(1/3) \log M - (5/3) \log \mu_e - 1.397 \quad (16)$$

が得られる筈である（この式中 M , R は太陽単位で表わしてある）。この式によれば、半径での 10 倍の範囲は質量での 1,000 倍の範囲を意味しており、このことは最小の白色矮星に予想される質量が極めて大きいという事実を別にしても一見して全くありそうにないことである。他方、正確な状態方程式に基づいて導かれた質量—半径関係は、それらの同じ恒星に対しても妥当な質量を定める。これが決定的証拠にはならないにしても、その基本的な予想では、理論が支持されるように思われる。

最後に白色矮星の平均分子量と化学組成の問題に移ろう。初めに述べたように白色矮星はそう多くの水素を含むことはできない。この理由は、もし恒星の本体内に相当量の水素があるとすれば、そのような高密度の下では、これらの恒星で観測される小さい光度とは矛盾するほどのエネルギー量が陽子—陽子反応で生成されるからである。実際、Schatzman & Lee の研究によれば、この条件から決まる水素量の限界は非常に低く、事実上、常に水素が含まれていないと見做して差し支えない。この結論はこれらの恒星のスペクトル中に水素線が観測されている事実とは矛盾しない。何故なら矢張り Schatzman が示したように、白色矮星の強い重力場の影響で、内部にどれほどの水素があったとしても $10^6 \sim 10^7$ 年程度の時間がたてば外方に拡散してしまうに違いない。従って、白色矮星中の水素は全て下の重元素の上に浮いて大気中にある。従って白色矮星の構造を解析するのに $\mu_e = 2$ と仮定して差し支えない。

§ 16. 縮退の判別

温度 T の自由電子の集合を考える。もし理想気体の状態方程式が成り立てば電子圧は

$$p_e = (k / \mu_e H) \rho T \quad (1)$$

で与えられる。ここで μ_e は(14.6)式と同じ意味を持っている。今、(1.30)と同様に

$$P = p_e + (1/3)aT^4, \quad \beta_e = p_e/P \quad (2)$$

と置けば(1.31)のように

$$p_e = [(k / \mu_e H)^4 (3/a) \{(1 - \beta_e) / \beta_e\}]^{1/3} \rho^{4/3} \quad (3)$$

となる。ここで(14.19), (14.20)で行なったように $\rho = Bx^3$ と書けば(3)は

$$p_e = A[(512\pi k^4 / ah^3 c^3) \{(1 - \beta_e) / \beta_e\}]^{1/3} 2x^4 \quad (4)$$

となる。ここで A は(14.17)と同じ意味である。(1.38)で与えた a の値を用いると、この式は簡単になって

$$p_e = A[(960/\pi^4) \{(1 - \beta_e) / \beta_e\}]^{1/3} 2x^4 \quad (5)$$

次に、同じ電子の集合に対して、縮退公式、即ち

$$p_e = Af(x) \quad (6)$$

で与えられる電子圧が計算できる。さて $f(x)$ の定義から(14.17), (14.18)を参照し

$$f(x) = 2x^4 \quad (\text{for } x < \infty) \quad (7)$$

が得られる。従って、(5)、(6)式を比較して、もし、ある決められた ρ と T とで理想気体の方程式(1)に基づいて計算される β_e の値が

$$(960/\pi^4)\{(1 - \beta_e)/\beta_e\} \geq 1 \quad (8)$$

であったとすれば、この決められた ρ と T に対してだけでなく、同じ β_e が得られる ρ と T の全ての値に対しても又、理想気体公式による圧力が縮退公式による圧力より大きくなるだろうと結論できる。

不等式(8)は

$$1 - \beta_e \geq 0.092 \quad (9)$$

と同じだから、以上から(9)式が成立つ時は常に物質は決して縮退できない。

この結果は次節に述べる恒星の生涯の最終段階と関連がある。縮退状態になるには質量の上限 M_3 があることは既に述べたが、 M_3 を越える大質量の恒星の中には、あたかも爆発的な最期(超新星)を予知して、その運命から身を守るために物質の放出によって自分の質量を減少させているかのように思われる恒星がある(ウォルフ・ライエ星 Wolf-Rayet star は300~500 km/secで物質を流出している)。大質量の恒星は、如何にして自分の将来が安定な縮退状態になり得ないことを予知し、身を守ろうとするのであろうか。

その理由はこうだ。縮退状態になり得ないような大質量の恒星の中では、輻射圧の占める割合が無視できなくなり、輻射圧によって恒星から物質が流出し、恒星は質量を減らすことになる。

全く一般的に、ある決まった ρ と T の物質が縮退しているか否かは次のような方法で確かめられる。

与えられた ρ と T に対して(1)、(2)によって β_e を計算する。もし $1 - \beta_e$ が

0.092 12を越えれば, この物質は縮退し得ない(9). しかし, $1 - \beta_e < 0.092 12$ であるならば, この時

$$[(960/\pi^4)\{(1 - \beta_e)/\beta_e\}]^{1/3} = f(x)/2x^4 \quad (10)$$

は一義的な解を持つだろう. その解を $x = x'$ とする. もし, 決められた ρ が Bx'^3 より著しく小さければ電子気体は縮退していないだろう. しかし, もし $\rho \gg Bx'^3$ であれば電子気体は縮退しているだろう. 実際問題として縮退に対する判別式は

$$\rho \geq Bx'^3 \quad (11)$$

とすることができるだろう.

Chapt. 5. 恒星進化に関する備考

§ 17. 恒星進化

この最後の章で今までに得られた知識に基づいて、何か恒星の進化に関する一般的な議論ができるかどうか簡単に調べてみよう。

もし恒星の構造、組成、エネルギー源についての知識が完全であると仮定すれば、原理的には進化が平衡配置の系列に沿って進んで行くという仮定に基づいて恒星の進化経路を追跡できる筈である。そのような研究が、期待される形の永年進化がある一定の段階で、不可能になることを示す可能性はある。もし、そうだとすれば、それを確定することは非常に重大である。何故なら恒星の進化における“不連続”は種々の恒星の現象—例えば新星、超新星、SS Cygni 星などによって示唆されているからである。しかし不幸にも恒星の永年進化を追跡するわれわれの能力は巨星や超巨星の構造、エネルギー源に関する知識の不足によって、著しいハンディキャップを受けている。従って、それらと主系列星との間に何か世代的な、あるいは他の関係があるか否かを決定することはできない。

仮にこれらの問題を無視し、主系列星の“すぐ過去”と“すぐ未来”に問題を限るとしたところで、対流核と輻射 envelope の物質がどの程度に相互混合が行なわれているかという問題を先ず解決しなければならない。この問題に関してしばしば次のような仮定がなされている、即ち恒星の組成は内部全体に亘って一様に保たれ、進化とは単に利用できる全水素の燃焼で成り立ち、これが完了した時に恒星は先ず白色矮星の段階に向かい、そして更に暗黒の、吸収だけをする、黒色矮星の段階へと急速に進行してゆく。

著者の見解によれば、 $M_3 \sim 1.44 M_{\odot}$ という限界質量を越える恒星にとって、白色矮星の状態になることは不可能だという事実を除外しても、この単純な描写は受け入れにくい重大な反論がある。勿論、完全縮退星に対する限界質量の存在は、重い恒星の進化の最終段階に対する重要な方向付けを持つに違いないことは明らかである。しかし、限界質量の存在が恒星の進化にどのように影響するかを確定的に結論できるまでには恒星の永年進化をその構造の判っている

状態から追求して行こうと試みるのが大切である。そして、このためには核の物質と envelope の物質との間に完全な混合はあるという普通の仮定や、恒星が常にその水素全部を燃やし得るといふ、矢張り普通に信じられてきたことを注意深く再調査することが必要である。著者には完全に燃え切って灰（恒星の場合にはヘリウム）だけを残す丸太棒と恒星との類推がそれ程満足なものとは思えない。何故なら、永年進化を追求することと調和してわれわれは恒星がずっとその重力の下に静流体力学的平衡の状態を保つだろうと想像しているが、その全エネルギー源を消耗し果たしている間中（準）定常的な平衡に支え得ることは既定の結果ではない。実際ここで示すように、このようなことは殆どあり得ないように思えるからである。

前に示したように (§ 11), 恐らく一旦炭素循環（あるいはもっと一般的に、水素からヘリウムへの変換）が作用し始め、対流核が形成されると、核と envelope との間には殆ど混合はあり得なくなるだろう。仮にこれが事実だと認めると、恒星の進化を何か次のような線に沿って描写することができよう。

恒星の組成が最初は一様であると想像しよう。炭素循環の働きは水素からヘリウムへの変換を始めるだろう。その結果、核の平均分子量は増大し、envelope のものとの差が生じて行くだろう。この状態の下では Ledoux が示したように、恒星は一般に、平均分子量 μ_c を持つ中心核と、 μ が連続的に μ_e から μ_t に減少する転移領域とから成る対流領域を持つだろう。それは対流側でこの μ_t の値、envelope 側で与えられた $\mu = \mu_e$ の値、境界面で μ_t/μ_e の量の密度の不連続を持つようなもので、対流側における有効ポリトロップ指数は(12.6)式によって $3/2$ である。さて、このようなモデルの Ledoux の研究によって μ_c/μ_e が 1 から 1.5 まで増加する時、対流領域（即ち核と転移層）の質量が僅か（ $\sim 5\%$ ）増加することが示される。（もし、 $X + Y \sim 1$, X の初期値 = 0.6 であったとすれば、 $\mu_c/\mu_e = 1.5$ は $X = 0.2$ に対応し、このことは、この段階で核にある利用し得る水素の $2/3$ が消費されてしまっているだろうということを意味している。） μ_c/μ_e が 1.5 以上に増加する時、対流核の質量は減少を始め、そして μ_c は増加し、 X_c は減少してゆくにも関わらず、この系列に沿ってのその後の進化（即ち $\mu_c/\mu_e = 1.5$ を越えての）は燃えた水素の総量にはそれ程の増加をもたらさない。例えば $\mu_c/\mu_e = 2$ と $\mu_c/\mu_e = 1.5$ を持つ平衡星では、含んでいる水

素の全量はそれ程著しい相異はない。従って永年進化はこの点で立往生してしまうように見えるだろう。

この段階で（あるいは恐らくもう少し早くても）恒星は中心に小さい等温核を形成させることが可能である。このように信ずる理由は、中心では、対流を保っておくだけの原動力がないかも知れないということである。また中心で普通は無視されている伝導や粘性因子のために相当の超断熱過剰が安定であるかも知れないということもあり得る。もし、これらが本当だとすれば、中心での水素燃料の補給は困難な過程になるかも知れないし、“不活発な”等温核を形成する可能性があるかも知れない。一旦そのような核ができてしまうと、それがある程度の安定性を持つことになるだろう。それは等温核の外側で輻射平衡にあり、分子量の変化する領域があり、それに続いて一定の分子量の対流領域、（同様に対流平衡にある）分子量の変化する転移領域、最後に輻射 envelope があることになるだろうと示されるからである。等温核を取り巻く輻射層の存在は、その上方の対流領域からの強引な乱流渦動の侵入に対して一種のクッションの働きをするであろう。

この点から以後の永年進化は水素を含まない等温核の成長になるだろう。しかし、この等温核の成長も無限には続かない。ある一定の極大サイズを越える等温核を恒星の内部に適合させ得ないという全く一般的な考察から、このことが言える。その理由は物理学的には、有限な質量の恒星中で、質量のある割合以上を最高温度に保っておくのに十分急激な温度傾斜を外方に作り得ないということである（完全に等温なガス球の質量は無限大であることに気付かねばならない）。すると、等温核がその最大の大きさにまで膨がった時、永年進化は明らかに阻止される。このことは全て恒星の進化でのかなり早い段階で起こり、その時内部の条件は、主系列星の中心で、現在信じられているものとそれ違うものではないと予想されることを強調しておこう。

中心領域での利用できる水素の供給を消耗し尽くして核エネルギー源が一旦停まると恒星は Helmholtz & Kelvin によって想像されたように収縮し、重力エネルギーを遊離する。しかし、これはその内部構造のかなり激烈な再調整が必要であろう。永年収縮によってエネルギーを遊離している恒星の平衡構造は、等温核の外側の対流領域で核反応によってエネルギーを遊離している恒星の構造

とは同じではない。恒星が力学的な進化によって、この必要な調整をやつてのけると想像しても、その困難は解消した訳ではない。と言うのは、ある期間収縮が行なわれた後、十分水素のある領域の温度が 2×10^7 K あるいはそれ以上に達し、核エネルギーが再び利用できるようになるからである。これによって収縮は停まるが外側で核エネルギーが生成されるような大きい不活動核を持っているは、安定な配置は存在し得ないことを既に知っている。

恒星の進化経路におかれた種々の障害物を見渡して、恒星の最終状態がどのようなものであろうかを探ることができる。自己の重力の下に平衡にある完全縮退物質が“その基底状態にある巨大分子に最もよく例えられる”(R. H. Fowler)という事実は白色矮星が恒星の最終状態を表現することに魅力を持たせる。既知の白色矮星が何も水素を含んでいない事実はこの見解を支持する。しかし限界質量の存在はこの“魅力”を $1.44M_{\odot}$ より小さい質量の恒星に対するものに限定してしまう。もしそれらがこの質量を越えているなら、それらが白色矮星に到達し得る唯一の方法は、何らかの手段でこの余分の質量を取り除いてしまうことである。ウォルフ・ライエ星 Wolf-Rayet stars が放出によって絶え間なく物質を失いつつある事実は、恒星の質量の比較的急速な減少の機構が存在することを示している。これに関連して次のような質問が出るかも知れない。 M_3 より大きい質量のガス状星はそれが究極の“debacle (Fr. 山津波)”に直面していることを如何にして“予知”できるのであろうか。実際にはその大質量のために輻射圧が全圧力のかなりの割合を占めるようになり、そして、もし輻射圧が全圧力の 0.091 倍を越えれば物質は決して縮退し得ないという事実によって、恒星は自然にそれを“予知する”ようになるのである。

上述のように、この縮退になり得ないということは、質量の大きい恒星の進化の最終段階でだけ意味を持つことができる(初期の段階で永年進化の経路にある種々な困難にも拘らず、そのような段階が期待できるとすれば)。何れにせよ限界質量の存在が“最終段階”にだけ影響するだろうと言う事実は、恒星のあらゆる爆発の中で、最も壮観で激変的なもの、即ち超新星現象がこれと何らかの形で関連しているという示唆を現実的にする。Baade & Minkowski による蟹星雲 Crab Nebula (超新星の名残り remant) の観測は、中心星が白色矮星の大きさであり、また星雲中の物質の質量が太陽質量の数倍程度であることを発

見している限り、上の示唆を緩やかに支持しているものと思われる。

Ionization potentials														
Atom	Stage of ionization													
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV
1 H	13.598													
2 He	24.587	54.416												
3 Li	5.392	75.638	122.451											
4 Be	9.322	18.211	153.893	217.713										
5 B	8.298	25.165	97.930	259.366	340.22									
6 C	11.260	24.383	47.387	84.492	292.08	489.96								
7 N	14.534	29.601	47.448	77.472	97.89	552.06	667.03							
8 O	13.618	35.117	54.034	77.413	113.90	138.12	739.32	871.39						
9 F	17.422	34.970	62.707	87.138	114.24	167.16	185.18	953.89	1103.1					
10 Ne	21.564	40.962	63.45	97.11	126.21	157.93	207.26	239.09	1195.8	1362.2				
11 Na	5.139	47.286	71.64	88.91	136.40	172.15	208.46	264.19	299.9	1465.1	1648.7			
12 Mg	7.646	15.035	80.143	109.31	141.27	186.51	224.95	265.92	328.0	367.5	1761.8	1863		
13 Al	5.986	18.896	28.448	119.99	153.75	190.47	241.44	284.59	330.2	398.6	442.0	2086	2304	
14 Si	8.151	16.345	33.492	45.141	160.77	205.08	246.49	303.16	361.1	401.4	476.1	525	2438	2673
15 P	10.486	19.725	36.18	61.42	65.02	220.45	263.28	309.37	371.7	424.4	479.5	561	612	2817
16 S	10.360	23.33	34.83	47.30	72.88	88.05	280.01	328.33	379.1	447.1	504.7	565	652	707
17 Cl	12.967	23.81	39.61	53.40	67.7	97.03	114.19	348.37	400.4	455.6	520.3	592	657	750
18 Ar	15.759	27.029	49.74	59.81	75.04	91.01	124.4	143.45	422.0	478.9	539.0	618	686	766
19 K	4.341	31.63	43.72	60.92	82.66	98.9	117.7	147.4	188.7	211.3	301.6	657	726	817
20 Ca	6.113	11.871	50.01	67.15	84.43	108.78	127.7	157.2	188.7	225.4	243.8	686	756	830
21 Sc	6.54	12.80	24.76	73.7	91.7	111.1	138.0	159.7	190.2	225.4	243.8	686	756	830
22 Ti	6.82	13.63	27.49	43.26	99.4	119.36	140.8	169.4	193.0	316.2	285.3	322	783	862
23 V	6.74	14.85	29.31	46.71	65.23	128.6	150.3	173.6	205.8	230.5	253.1	308	336	896
24 Cr	6.766	16.80	30.99	49.1	70.2	90.27	161.1	184.6	209.3	244.4	270.7	298	355	384
25 Mn	7.435	15.640	33.87	51.4	73.0	97	119.27	195.47	221.8	248.3	286.0	314	344	404
26 Fe	7.870	16.10	30.651	54.8	75.5	100	128.3	131.13	235.0	262.1	290.4	331	361	392
27 Co	7.86	17.06	33.50	51.3	79.5	103	131	160	186.2	276.2	305	336	379	411
28 Ni	7.635	18.168	35.17	54.9	75.5	108	134	164	193	224.6	321	352	384	430
29 Cu	7.726	20.292	36.83	55.2	79.9	103	139	167	199	232	266	309	401	436
30 Zn	9.394	17.064	39.72	59.4	82.6	108	136	175	203	238	274	311	412	454

Ionization potentials														
Atom	Stage of ionization													
	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII
	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV
1 H														
2 He														
3 Li														
4 Be														
5 B														
6 C														
7 N														
8 O														
9 F														
10 Ne														
11 Na														
12 Mg														
13 Al														
14 Si														
15 P	3070													
16 S	3224	3404												
17 Cl	869	3658	3946											
18 Ar	855	918	4121	4426										
19 K	862	968	1034	4611	4934									
20 Ca	895	974	1087	1157	5129	5470								
21 Sc	927	1009	1094	1213	1283	6675	8034							
22 Ti	941	1044	1131	1221	1346	1425	6249	6626						
23 V	975	1060	1168	1260	1355	1456	1560	6851	7246					
24 Cr	1011	1097	1185	1299	1396	1490	1634	1721	7482	7895				
25 Mn	435	1136	1224	1317	1437	1539	1644	1788	1879	8141	8672			
26 Fe	467	489	1266	1358	1456	1582	1689	1799	1950	2045	8828	9278		
27 Co	444	512	547	1402	1500	1602	1734	1846	1962	2119	2218	9544	10030	
28 Ni	464	499	671	607	1646	1648	1756	1894	2010	2131	2295	2398	10280	10790
29 Cu	484	520	557	633	671	1698	1804	1919	2060	2182	2310	2478	2560	11050
30 Zn	490	542	579	619	698	738	1856	1970	2088	2234	2363	2495	2600	2730

Ionization potentials

Atom	Stage of ionization									
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV
31 Ga	5.999	20.51	30.71	64	87	116	140	170	212	243
32 Ge	7.899	15.934	34.22	45.71	93.5	112	144	174	207	250
33 As	9.81	18.633	28.351	50.13	62.63	127.6	147	179	212	242
34 Se	9.752	21.19	30.820	42.944	68.3	81.7	155.4	184	218	250
35 Br	11.814	21.8	36	47.3	59.7	88.6	103.0	192.8	224	257
36 Kr	13.999	24.359	36.95	52.5	64.7	78.5	111.0	126	230.9	263
37 Rb	4.177	27.28	40	52.6	71.0	84.4	99.2	136	150	277.1
38 Sr	5.695	11.030	43.6	57	71.6	90.8	106	122.3	162	177
39 Y	6.38	12.24	20.52	61.8	77.0	93	116	129	146.2	191
40 Zr	6.84	13.13	22.90	34.34	81.5	99	117	140	155	
41 Nb	6.88	14.32	25.04	38.3	50.55	102.6	125	142	161	
42 Mo	7.099	16.15	27.16	46.4	61.2	68	126.8	153	163	
43 Tc	7.28	15.26	29.54	46	55	80			187	
44 Ru	7.37	16.76	28.47	50	60	92				
45 Rh	7.46	18.08	31.06	48	65	97				
46 Pd	8.34	19.43	32.92	53	62	90	110	130	155	180
47 Ag	7.575	21.49	34.83	56	68	89	115	140	160	185
48 Cd	8.993	16.908	37.48	59	72	94	115	145	170	195
49 In	5.786	18.869	28.03	54.4	77	98	120	145	180	205
50 Sn	7.344	14.632	30.502	40.734	72.28	103	125	150	175	210
51 Sb	8.641	16.53	25.3	44.2	56	108	130	155	185	210
52 Te	9.009	18.6	27.96	37.41	58.75	70.7	137	165	190	220
53 I	10.451	19.131	33	42	66	81	100	170	200	230
54 Xe	12.130	21.21	32.1	46	57	82	100	120	210	240
55 Cs	3.894	25.1	35	46	62	74	100	120	145	250
56 Ba	5.212	10.004		49	62	80	95	120	145	160
57 La	5.577	11.06	10.175	52	66	80	100	115	145	165
58 Ce	5.47	10.87	20.20	36.72	70	85	100	120	140	165
59 Pr	5.42	10.55	21.62	38.95	57.45	89	105	120	145	160
60 Nd	5.49	10.72					110	130	150	170
61 Pm	5.55	10.90						135	155	175
62 Sm	5.63	11.07							160	180
63 Eu	5.67	11.25								190
64 Gd	6.14	12.1								
65 Tb	5.85	11.52								
66 Dy	5.93	11.67								
67 Ho	6.02	11.80								
68 Er	6.10	11.93								
69 Tm	6.18	12.05	23.71							
70 Yb	6.254	12.17	25.2							
71 Lu	5.426	13.9	19							
72 Hf	7.0	14.9	23.3	33.3						
73 Ta	7.89	18	22	33	45					
74 W	7.98	18	24	35	48	61				
75 Re	7.88	17	26	38	51	64	79			
76 Os	8.7	17	25	40	54	68	83	100		
77 Ir	9.1	17	27	39	57	72	88	105	120	
78 Pt	9.0	18.56	28	41	55	75	92	110	125	145

