S．チャンドラセカール著

恒星内部構造論（1）

恒星の構造、組成およびエネルギー源

S. Chandrasekhar

The Structure, the Composition
and the Source of Energy of the Stars

Chapter 14 of "Astrophysics" ed. by J. A. Hynek
McGraw-Hill Co. 1951.

小山　伸　　訳
加藤　賢一　採録、補

恒星内部構造論(1)
恒星の構造，組成およびエネルギー源

目　　次

本書について

本書は香川大学教育学部で長らく教鞭をとられた故小山伸氏（1927-1998、在職期間：1951-1991）が翻訳されたもので、講義用資料として作成されたようである。

2017 年頃、同大学の出身である大島修氏よりコピーを pdf 化したファイルを提供していただいた。内部構造論を手短に解説したものとしては秀逸と思われたので改めて読んでみることにしたが、ところどころ判読が困難な箇所があったため、それを追跡するにも明瞭なコピーが欲しいと思い、こうした形に作成し直してみた。

まだ巨星の構造がはっきりせず、したがって進化への理解もまだまだという段階にあった時代の産物である。また、中性子星やブラックホールの発見前で、大質量星の最後についてははなはだ歯切れが悪い。当時、こうした天体の研究を進めていたチャンドラセカールとしては何をか言いたくてもはっきりと言いにくい状況だったのだろうと想像させる。執筆以来 70 年余を経て、本書は歴史を刻む一書となったと言えよう。

なお、小山伸氏による恒星大気論の同種のテキストが大島修氏の次のページに掲載されている。併せて参照して戴ければ参考になろうかと思う。
https://otobs.org/hiki/?Astrophysics+of+Stellar+Atmospher

小山伸氏の香川大学での様子や人物像については、例えば
片山敏彦　『チャンドラセカール「星の構造」と我が人生』（天文教育 2010 年 9 月号）を参照していただきたい。
https://tenkyo.net/kaiho/pdf/2010_09/2010-09-05.pdf

2023 年 1 月 10 日
星学館
加藤　賢一

恒星内部構造論

恒星の構造，組成およびエネルギー源

チャンドラセカール

恒星の質量は電子の質量の10^{60}倍もある．しかし，ある意味では，それらはもっとずっと大きいとも言える．われわれの時代の主役は電子なのか、恒星なのか、何れとも断言しがたい。

A. S. Eddington

恒星の内部構造論は恒星内部の物理学的な条件を研究する天体物理学の一分野である．恒星の進化，その他，天体物理学，宇宙論のもっと大きい問題を研究するには個々の恒星の構造がよく理解されていなければならない．

恒星の構造論の主要な研究目的は

１．密度・温度・圧力などの物理性質が恒星内部でどう変わるか
２．恒星内部のエネルギー輸送や温度傾斜を保つのに，輻射・伝導・対流のうちどの輸送が重要であるか
３．この熱輸送は，どんな物理過程で行なわれているか
４．恒星内部で起こっているはずの非可逆過程を決定し，恒星のエネルギー源を求める
５．恒星内部の物質の化学組成が求められるか
６．以上の知識に基づき，恒星の起源や進化について一般的結論が得られるか

この目的には基礎になる天文学的データが必要であるが，それらは何らかの意味で恒星を全体的に特徴づけるものでなければならない．われわれが恒星の構造を問題にするのは「恒星全体として」であるからである．

太陽のような恒星を考える場合，質量M(g)，半径R(cm)が重要なデータであることは直ぐわかる．更に恒星は絶えず輻射を空間に放出しているので，光

度L(erg/sec)もM，Rとともに基本的な量である．

実際，観測から得られる質量，半径，光度，あるいはそれらの相互関係は恒星構造の研究に重要な知識である．この他にも補足的な知識が種々の恒星から得られる．脈動変光星からは変光周期と上の基本的パラメターとの関係，連星からは長軸の回転から恒星内部の密度分布などが推定される．しかし，ここでは最も簡単な，定常的で，自転していない単独星を考えよう．

Chapt.１．恒星内部の物理条件

§１．平衡方程式 The equilibrium equations.

恒星の内部構造論の唯一の方法は理論物理学に基づく推論である．従って一つの結論を得るためには多くの仮定を設けるが，得られた理論の正否は，理論的に矛盾がないか，また自己撞着がないか，によって判断される．従って、特定の結論に達するにはどれが本質的な要素であるかに気づかなければならない．第一歩は，できるだけ少ない仮定で，恒星内部の物理状態のおよその概念を得ることである．

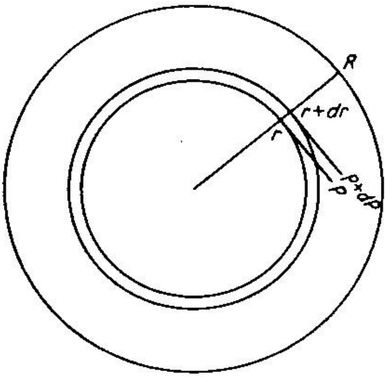

Fig. 14.1

太陽は何十億年も輝いてきた単独星だから，内部の任意の点で，それより上層の重さと下方からの圧力が平衡を保っているに違いない．前者は下方に重力を及ぼして下の物質を押し潰そうとし，後者は膨張して上層の物質を外方へ押し上げようとする．このことを「恒星は自己重力で静流体力学平衡にある」と言う．

図のように，恒星の中心 C から距離rの点で半径方向に置いた底面積 1，高さ$\mathrm{d}r$，質量$\mathrm{d}m$の小体積を考え，これの上下両面に働く圧力差を$\mathrm{d}P$とすれば，それは半径r 内部の質量$M(r)$による重力と釣合い

$$\mathrm{d}P = -g\,\mathrm{d}m = -g\rho\mathrm{d}r \tag{1}$$

となる。ここでgは距離rの点での局所的な重力加速度，ρは局所的な密度である．gは万有引力の法則により

$$g = GM(r)/r^2 \tag{2}$$

で，$G(6.67\times10^{-8}\ \mathrm{dyn\cdot cm^2/g^2})$は重力定数である．従って，重力による静流体力学平衡の条件は

$$dP/dr = -((GM(r))/\,r^2)\rho \qquad \text{（圧力分布の式）} \tag{3}$$

である．半径r，厚み$\mathrm{d}r$の球殻の質量$\mathrm{d}M(r)$は$4\pi r^2\rho\mathrm{d}r$だから

$$(\mathrm{d}M(r))/\mathrm{d}r = 4\pi r^2\rho \qquad \text{（質量分布の式）} \tag{4}$$

あるいは積分形で書けば

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

である．

恒星内部で圧力Pに寄与するのは輻射圧P_rと物質のガス圧P_gである．輻射圧はステファン・ボルツマン Stefan-Boltzman の法則により

$$P_r = aT^4/3 \tag{5}$$

で，Tは局所的な絶対温度，$a(=7.75\times10^{-15})$は輻射定数である．局所的なガス圧と温度・密度との関係は状態方程式で決まる．後で考察するように，大抵の恒星の内部では，近似的に理想気体の状態方程式*1

$$P_g = (k/\mu H)\rho T \quad (6)$$

が成り立つ．ここで$k(= 1.38 \times 10^{-16})$はボルツマン定数，$H(= 1.67 \times 10^{-24}$ g)は水素原子の質量，μ平均分子量である．恒星内部の条件での化学組成とμの値との関係は重要な問題なので後で詳しく考えるが，ここではそれが$5 \leq \mu \leq 2.0$の範囲にあることだけを述べておく．

暫定的に理想気体の状態方程式(6)を受け入れ

$$P = P_r + P_g = (aT^4)/3 + (k/\mu H)\rho T \quad (7)$$

恒星内部の圧力分布(3)，質量分布(4)が与えられると内部の圧力，温度の大きさが推定できるが，便宜的にもう一つの仮定を置く:

「恒星内部の任意の点で，温度や密度が外向きには増加しない」

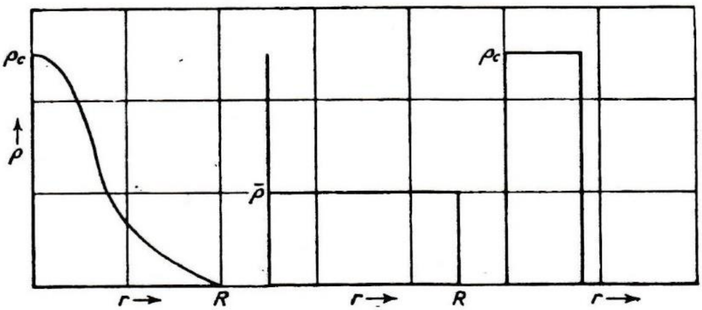

FIG. 14.2

と仮定する．この制限は当然だとも言えない．非定常な恒星ではこの制限は成立たない．

さて，質量M，半径Rの恒星を考えよう．密度ρは中心で最大値ρ_0を取り，中心からの距離rとともに減少し，恒星表面$r = R$で$\rho = 0$となるはずだから，その物質配置は図の a のようなものだと想像される．

これに対して密度一定の極端な２つの平衡配置を考える．

b：恒星の平均密度$\bar{\rho}(=M/(4/3)\pi R^3)$に等しく均された一定密度を持つ
c：恒星の中心密度ρ_cに等しい一定密度を持つ

こうすれば，現実の恒星の内部の圧力状況は，これら密度一様な両極端な配置から得られるものの中間にあることが容易にわかる．また，恒星の中心圧力ρ_cもこれら両極端な場合の中間にあることが次のようにしてわかる．恒星の中心圧力は恒星の物質を中心近くに集めるほど増加し，物質を外方へ移すほど減少する．従って，中心圧力が最大になるのは物質をできるだけ中心に集め，ρ_cに等しい一様密度にした場合(c)，最小となるのは物質をできるだけ中心から通ざけ（仮定によってρは外方に増加しないから）$\bar{\rho}$に等しい一様密度にした場合(b)である．

さて(3)，(4)を組合せ

$$\mathrm{d}P=-(G/4\pi)\{M(r)/r^4\}\mathrm{d}M(r) \qquad (8)$$

この式を中心（$r=0$，$M(r)=0$，$P=P_0$）から表面（$r=R$，$M(r)=M$，$P=0$）まで積分すれば

$$P_c=(G/4\pi)\int_0^M\{M(r)/r\}\mathrm{d}M(r) \qquad (9)$$

次に平均圧力$\bar{P}$として質量による加重平均をとり

$$\bar{P}=(1/M)\int_0^M P\mathrm{d}M(r) \qquad \text{部分積分で}$$

$$=(1/M)\{[P\cdot M(r)]_0^M-\int_{P_c}^0 M(r)\mathrm{d}P\}$$

$$=(1/M)\int_0^{P_c} M(r)\mathrm{d}P$$

この dPに(8)式を代入し

$$\bar{P} = (G/4\pi)(1/M)\int_0^M \{M(r)^2/r^4\}\mathrm{d}M(r) \tag{10}$$

同様に平均温度$\bar{T}$として

$$\bar{T} = (1/M)\int_0^M T\mathrm{d}M(r)$$

結果的に言って太陽程度の恒星では，輻射圧P_rはガス圧P_gに比べてまだまだ小さく，Pとしては(7)式の第 1 項を省略して第 2 項だけを取り，そのTを上式に代入すれば

$$\bar{T} = (1/M)(\mu H/k)4\pi\int_0^M (P/\rho)\mathrm{d}M(r)$$

この dM(r)に(4)式を代入し

$$\bar{T} = (1/M)(\mu H/k)4\pi\int_0^R Pr^2\mathrm{d}r \qquad \text{部分積分により}$$
$$= (1/M)(\mu H/k)(4\pi/3)\int_0^{P_0} r^3\mathrm{d}P$$

このdPに(8)式を代入すれば

$$\bar{T} = (1/M)(G/3)(\mu H/k)\int_0^M \{M(r)/r\}\mathrm{d}M(r) \tag{11}$$

となる．(9)，(10)，(11)式を見ればP_c，$\bar{P}$，$\bar{T}$が全て積分

$$I_{i,j} = G\int_0^M \{M(r)^i/r^j\}dM(r) \qquad \text{但し}3(i+1) > j \tag{12}$$

の形で表現されており

$$P_c = (1/4\pi)I_{14}，\bar{P} = (1/4\pi M)I_{24}，\bar{T} = (\mu H/3kM)I_{11} \tag{13}$$

である．さて半径rの球内部の平均密度$\bar{\rho}(r)$は

$$\bar{\rho}(r) = M(r)/\{(4\pi/3)r^3\} \tag{14}$$

であるから，これから

$$r^j = [(3/4\pi)\{M(r)/\bar{\rho}(r)\}]^{j/3} \tag{15}$$

これを(12)式に代入すると

$$I_{ij} = G(4\pi/3)^{j/3}\int_0^M \bar{\rho}(r)^{j/3} M(r)^{(3i-j)/3}\mathrm{d}M(r) \tag{16}$$

われわれの仮定では，$\bar{\rho}(r)$は外向きには増加しない．積分 $I_{i,j}$ の上限・下限を求めるために，前記の 2 つの極端な密度配置に対応して，積分記号内の$\bar{\rho}(r)$を置き換える．$\bar{\rho}(r)$はを一定値 ρ_c で置き換え，積分記号の外に出せば積分(16)の上限が得られ，同様に$\bar{\rho}(r)$を一定値$\overline{\rho}$で置き換えると積分(16)の下限が得られる．後に残る$M(r)$だけについての積分は $3(i+1) > j$ の時に収束するが，今の場合にはこれが満たされている．こうしてI_{ij}両限が求まり

$$\mathrm{A}_{ij} = [3G/\{3(i+1)-j\}](4\pi/3)^{j/3}M(r)^{(3i+3-j)/3}$$

と書くことにすれば

$$\mathrm{A}_{ij}{\rho_c}^{j/3} \geq I_{ij} \geq \mathrm{A}_{ij}\bar{\rho}^{j/3} \tag{17}$$

これを(13)式に代入する．今

$$B \equiv G(4\pi/3)^{1/3}M^{2/3}$$
$$C \equiv B(\mu H/k)$$

と置けば

$$(1/2)B{\rho_c}^{4/3} \geq P_c \geq (1/2)B\bar{\rho}^{4/3} \tag{18}$$
$$(1/5)B{\rho_c}^{4/3} \geq \bar{P} \geq (1/5)B\bar{\rho}^{4/3} \tag{19}$$
$$(1/5)C{\rho_c}^{1/3} \geq \bar{T} \geq (1/5)C\bar{\rho}^{1/3} \tag{20}$$

恒星全体としての密度

$$\bar{\rho} = \mathrm{M}/(4\pi/3)R^3 \tag{21}$$

を(18)～(20)式に代入すれば

$$(3/8\pi)(GM^2/R^4) \leq P_c \leq (3/8\pi)(GM^2/R^4)(\rho_c/\bar{\rho})^{4/3} \tag{22}$$
$$(3/20\pi)(GM^2/R^4) \leq \bar{\bar{P}} \leq (3/20\pi)(GM^2/R^4)(\rho_c/\bar{\rho})^{4/3} \tag{23}$$
$$(1/5)(\mu H/k)(GM/R) \leq \bar{T} \leq (1/5)(\mu H/k)(GM/R)(\rho_c/\bar{\rho})^{1/3} \tag{24}$$

恒星の中心温度T_cの下限を求めるのはやや困難である．しかし，恒星の内部でμが一定で，ρとTが外向きに増加せず、理想気体の状態方程式が成立つ条件の下では

$$T_c \geq (1/2)Q(\mu H/k)(GM/R) \tag{25}$$

が得られる．QはMとμによって決まる複雑な因子で，次の表１のような値をとる．太陽程度の恒星ではQ～0.6くらいの値で，質量Mの増大にともなって緩やかに減少する．

(22)～(25)式の物理定数に数値を代入し，質量，半径をそれぞれ、太陽の質量（$M_\odot = 1.985 \times 10^{33}$ gm），半径（$R_\odot = 6.951 \times 10^{10}$ cm）を単位にして表すと

Table 14.1. Values of Q for Determining the Minimum Central Temperatures of Stars

$\frac{M}{\odot}\mu^2$	Q	$\frac{M}{\odot}\mu^2$	Q	$\frac{M}{\odot}\mu^2$	Q	$\frac{M}{\odot}\mu^2$	Q
0	0.640	9.2	0.524	28.8	0.364	86.3	0.230
2.301	0.624	10.4	0.508	34.5	0.337	132	0.189
3.452	0.610	11.5	0.494	40.3	0.318	237	0.144
4.602	0.592	14.4	0.463	46.0	0.300	539	0.0976
5.753	0.574	17.3	0.438	51.8	0.287	∞	0
6.90	0.557	20.1	0.414	57.5	0.273		
8.05	0.541	23.0	0.396	71.9	0.246		

$$P_c \geq 1.326 \times 10^9 (M/M_\odot)^2 (R_\odot/R)^4 \quad 気圧 \tag{26}$$

$$\bar{P} \geq 4.3 \quad \times 10^8 (M/M_\odot)^2 (R_\odot/R)^4 \quad 気圧 \tag{27}$$

$$\bar{T} \geq 4.61 \quad \times 10^6 \quad \mu (M/M_\odot)(R_\odot/R) \quad （P_r は無視） \tag{28}$$

$$T_c \geq 1.1.53 \times 10^6 Q\mu (M/M_\odot)(R_\odot/R) \tag{29}$$

が得られる．数個の代表的な恒星に対して(26)～(29)式で得られるP_c，$\bar{P}$，T_c，$\bar{T}$の下限の値は次の表２のようである．この表から主系列星の内部に対して10^7K 程度の温度と10^{10}気圧程度の圧力が予想される．

Table 14.2. The Minimal Conditions in the Interiors of Some Typical Stars

Star	M	R	L	P_c (min), atmospheres	$\bar{P}$ (min), atmospheres	$\bar{T}$ (min), millions of degrees	T_c (min), millions of degrees		$1-\beta^*$	
						$\mu = 1$	$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu = 1$	$\mu = 2$
Sun	1.00	1.00	1.00	1.326×10^9	5.30×10^8	4.6	7.4	14.0	0.030	0.209
ζ *Her*	1.12	2.04	4.57	9.60×10^7	3.84×10^7	2.5	4.0	7.5	0.036	0.232
α *CMi*	1.63	1.70	5.75	4.22×10^8	1.685×10^8	4.4	7.0	13	0.067	0.313
α *CMa*	2.34	1.78	38.9	7.24×10^8	2.89×10^8	6.1	9.4	16	0.113	0.393
μ *Sco*	12.4	5.37	5500	2.45×10^8	9.80×10^7	10.6	13	15	0.454	0.696
Capella	4.18	15.8	120	3.74×10^5	1.495×10^5	1.2	1.8	2.6	0.218	0.513

上の一般的な考察から求められるもう一つの重要な因子は、全圧力Pの中にしめるガス圧P_{g}および輻射圧P_{r}の相対的な割合である。この際、全圧力Pに対するガス圧P_{g}の比を$\beta \equiv P_{\mathrm{g}}/P$ と定義すると都合がよい。即ち

$$P_{\mathrm{g}} = (k/\mu H)\rho T = \beta P,\ P_{\mathrm{r}} = (a/3)T^4 = (1-\beta)P \tag{30}$$

この両式からP, Tを次々に消去すると

$$T = [(k/\mu H)\,(3/a)\{\,(1-\beta)/\beta\}]^{1/3}\rho^{1/3}$$
$$P = (k/\mu H\beta)\rho T = [(k/\mu H)^4\,(3/a)\{\,(1-\beta)/\beta^4\}]^{1/3}\rho^{4/3} \tag{31}$$

特に恒星の中心では

$$P_c = [(k/\mu_c H)^4\,(3/a)\{\,(1-\beta_c)/\beta_c^4\}]^{1/3}\rho_c^{4/3} \tag{32}$$

このP_cの式を(18)式の左辺と比較すれば

$$[(k/\mu_c H)^4\,(3/a)\{\,(1-\beta_c)/\beta_c^4\}]^{1/3} \leq (\pi/6)^{1/3}\,GM^{2/3}$$

が得られるが，これを書換えると

$$M \geq (6/\pi)^{1/2}\,[(k/\mu_c H)^4\,(3/a)\{\,(1-\beta_c)/\beta_c^4\}]^{1/2}G^{-3/2} \tag{33}$$

となる．この式の等号が成立つ場合のβ_cの値をβ^*と定義する．即ち
$\beta^* = \beta^*(M,\ \mu_c)$ により

$$M = (6/\pi)^{1/2}\,[(k/\mu_c H)^4\,(3/a)\{\,(1-\beta^*)/\beta^{*4}\}]^{1/2}G^{-3/2} \tag{34}$$

と置けば，(33)，(34)により

$$(1-\beta_c)/\beta_c^4 \leq (1-\beta^*)/\beta^{*4} \tag{35}$$

を得る．ところが$(1-\beta)/\beta^4$という関数は$(1-\beta)$の単調増加関数であるから(35)が成立つことは

$$1-\beta_c \leq 1-\beta^* \tag{36}$$

が成立つことである．即ち恒星の中心での輻射圧P_rと全圧力Pとの比$(1-\beta_c)$はMとμ_cで決まるある値$(1-\beta^*)$を越えることはできない．表 3 には種々の$(M/M_\odot)\mu_c^2$の値に対する$(1-\beta_c)$の上限$(1-\beta^*)$の値が示してある．

代表的な恒星に対する$(1-\beta^*)$の値は表 2 に示してあったが，その値を見ると太陽質量$M_\odot$の 2〜3 倍以下の質量の恒星では，静流体力学平衡式の圧力Pの中で輻射圧P_rを無視しても，それほどの誤差を生じないことがわかる．後にわかるように，μ_c~1の程度の値である．

β^*に対する(34)式からもう一つ興味ある問題が得られる．それはこの式が物理定数の組み合わせによって左辺には質量の Dimension の量だけが孤立していることである。即ち

$$[M] = (6/\pi)^{1/2}\,[(k/H)^4\,(3/a)]^{1/2}G^{-3/2} \tag{37}$$

ここで

$$a = (8\pi^5k^4)/(15c^3h^3) \tag{38}$$

であるから(37)は簡単になって

$$[M] = \{(135)^{1/2}/2\pi^3\}\,(hc/G)^{3/2}H^{-2} \sim 5.4\,M_\odot \tag{39}$$

TABLE 14.3. THE MAXIMUM RADIATION PRESSURE IN STARS

$1-\beta^*$	$\frac{M}{\odot}\mu_c^2$	$1-\beta^*$	$\frac{M}{\odot}\mu_c^2$	$1-\beta^*$	$\frac{M}{\odot}\mu_c^2$
0.01	0.56	0.14	2.77	0.35	7.67
0.02	0.81	0.15	2.94	0.40	9.62
0.03	1.01	0.16	3.11	0.45	12.15
0.04	1.19	0.17	3.28	0.50	15.49
0.05	1.36	0.18	3.46	0.55	20.06
0.06	1.52	0.19	3.64	0.60	26.52
0.07	1.68	0.20	3.83	0.65	36.05
0.08	1.83	0.21	4.02	0.70	50.92
0.09	1.98	0.22	4.22	0.75	75.89
0.10	2.14	0.23	4.43	0.80	122.5
0.11	2.29	0.24	4.65	0.85	224.4
0.12	2.45	0.25	4.87	0.90	519.6
0.13	2.61	0.30	6.12	1.00	∞

原子物理学に基づいた普通の恒星の構造理論が、うまく成功する基本的な理由は$(hc/G)^{3/2}H^{-2}$という量が、恒星の質量の大きさ程度の値であるという事実によると思われる。

Dimension が質量になるような、定数h、c、G、Hの最も一般的な組み合わせは$(hc/G)^{\alpha}H^{1-2\alpha}$で、αは任意の数値である。$\alpha = 1.5$、1.75、2.0の等差級数に対して上の組み合わせで表される質量はそれぞれ$5.4\ M_{\odot}$、$1.7 \times 10^{11}\ M_{\odot}$、$9.5 \times 10^{20}\ M_{\odot}$となり、その値はそれぞれ恒星、銀河系、宇宙の程度の値である。後の二者が全く偶然に一致によるのか、あるいは現在でも未知な何か原子論と宇宙論との間の、ずっと奥深い関係を示しているのかも知れない。