§10. エネルギー放出の式

(§7.18)式によって，2×10^7 K の温度では炭素循環は H および N の各 1 gr 当たり$246\times(100/30)\sim820$ erg/gr · sec のエネルギーを生成し，この温度ではエネルギー生成量が実質的にT^{18} に比例することを知った．われわれは実際2×10^7 K 程度の温度を扱うわけだから（表 9 参照），十分よい近似として炭素循環によるエネルギー遊離率を

$$\varepsilon = 1440C_{\mathrm{N}}(1-X-Y)\rho X\{T/(2\times10^7)\}^{18}\ \ \mathrm{erg/gr\cdot sec} \tag{1}$$

と書くことができる．C_{N}は H と He を除いた重元素 $(1-X-Y)$ の中で N の占める質量による相対量である．

［(1)式の係数 1440 は表 10 に与えたデーターには対応していない．これは $T=2\times10^7$ K，$\rho X=30$ gr の炭素循環に対する平均寿命の以前の古い推定値（1.3×10^6 year）に対応している．この§での数値的な値は最近の断面積の値に合うように修正されていない．これらの新しい断面積に従うなら(1)式の係数は最初に述べたように 820 でなければならない．しかし，表 9 で示されているように太陽の中心におけるもう少し低い温度（1.7×10^7 K）ではエネルギーの生成に陽子－陽子反応が実質的に寄与してくる．このことは(§7.18'), (§8.21)からも明らかである．従って，これらの特殊な計算を修正するほどの必要性もない］

(1)式は次のような形で書ける

$$\varepsilon = \varepsilon_0\rho T^{18}\ ;\quad \varepsilon_0 = \{1440C_{\mathrm{N}}X(1-X-Y)/(2\times10^7)^{18}\} \tag{2}$$

ε がこのように表わせる時，Lは(§5.11)により

$$L = 4\pi\varepsilon_0\int_0^R \rho^2T^{18}r^2dr \tag{3}$$

で求められる．

ε が温度Tの非常な高冪に依存しているので対流核以外で生成されるエネルギーの割合は無視できる（これは最初点源モデルを用いたことの正当化である）．従って(3)の積分を$0 \le r \le r_i$（r_iは対流核の半径）だけに限定することができ，また核の中ではρ が$T^{3/2}$ に比例することを思い出し

$$L = 4\pi\varepsilon_0 {\rho_c}^2 {T_c}^{18} \int_0^{r_i} (T/T_c)^{21}\, r^2 dr \tag{4}$$

核の質量は類似の式

$$M(r_i) = 4\pi {\rho_c}^2 \int_0^{r_i} (T/T_c)^{3/2}\, r^2 dr \tag{5}$$

で与えられるので

$$L/M = \varepsilon_0 \rho_c {T_c}^{18} \times [\{M(r_i)/M\} \int_0^{r_i} (T/T_c)^{21}\, r^2 dr \,/\, \int_0^{r_i} (T/T_c)^{3/2}\, r^2 dr] \tag{6}$$

と書くことができる．右辺の分子の integrand に入っている(T/T_c)の冪 21 はエネルギー生成の法則$\varepsilon = \varepsilon_0 \rho T^{\nu}$ の指数νによって決まる．今の場合では$\nu = 18$である．[ ] の量は Schwartzschild によって$\alpha = 0.25$ を持つ点源モデルに対して計算されている．彼は$\nu = 15$，17，19に対して[ ]内の量がそれぞれ$1/41$，$1/47$，$1/54$であることを見出だしている．従って$\nu = 18$ に対して

$$L/M = (\varepsilon_0/50.5)\rho_c {T_c}^{18} \tag{7}$$

今考えているモデルに対しては（表 7 を参照し），M，Rを太陽単位で表わし

$$\rho_c = 111.6(M/R^3)，T_c = 2.589 \times 10^7 \mu (M/R) \tag{8}$$

［前の式の導出：太陽の平均密度$\bar{\rho} = 1.4109$ だから$\rho_c/\bar{\rho} = 79.1$ の関係からM，Rを太陽単位で表わせば$\rho_c = 79.1 \times 1.4109(M/R^3)$］

さて(2)，(7)，(8)式を組み合わせれば

$$
\begin{aligned}
L/M &= \{1.440C_{\mathrm{N}}(1-X-Y)X\} \\
&\quad \times \{111.6(M/R^3)\}\{1.295\mu(M/R)\}^{18}\,\{(M_\odot/R_\odot)/50.5\} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

となる．このμに(§2.15)式を代入すれば

$$
\begin{aligned}
&(0.75X+0.125Y+0.25)^{18}\,/X(1-X-Y) \\
&\quad = 0.666C_{\mathrm{N}}(M^{20}/LR^{21}) \qquad (10)
\end{aligned}
$$

(10)式はL，M，Rの知られている恒星に対して，XとYとの第 2 の関係を与える．観測された光度が既知のエネルギー源で説明されねばならないので，この条件が満たされねばならない．この式をエネルギー放出の式と呼ぶことにしよう。

(10)式を用いるのに$C_{\mathrm{N}} = 0.25$を仮定しよう．これは恒星のスペクトルからの証拠によって導かれる炭素と窒素の和の相対量である．この値を恒星の内部に対して採用するということは，恒星全体としての炭素と窒素の“初めの”相対量が，現在恒星の大気で見出だされるのと同じであったことを事実上仮定することになる．しかしながら，炭素循環がある期間働けば炭素，窒素およびその同位元素の相対量は永年平衡に調和するように修正されてくることに注意しなければならない．例えば，窒素と炭素とは（地球上や他の部分では，それはほぼ同量存在するのに），対流核の中では1.4×10^{-2}の比で存在することになるだろう．後程この問題に戻ろう．

さて $C_{\mathrm{N}} = 0.25$ を仮定すれば(10)式は

$$
\begin{aligned}
&(0.75X+0.125Y+0.25)^{18}/X(1-X-Y) \\
&\quad = 0.167(M^{20}/LR^{21}) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

太陽と Sirius A の場合に対し(11)から要求されるXとYとの関係が，図 14.7 と図 14.8 に一緒に示されている．この図から，質量－光度－半径関係とエネル

ギー放出の式の両方が満たされるようなXとYを見出だし得ることが判る．この方法で決定される太陽と Sirius A の水素およびヘリウムの量は

太陽	$X = 0.593$	$Y = 0.362$	$1 - X - Y = 0.045$
Sirius A	$X = 0.68$	$Y = 0.28$	$1 - X - Y = 0.04$ (12)

上で用いた不透明度の法則の近似式や，仮定した窒素の量や，$_7\mathrm{N}^{14}$反応に対して採用したΓの値などに含まれる不確かさ，これらは全て結果のX，Yの値に影響してくる．これらの不確かさを概略調べてみると（XとYとにおける不確かさは逆符号だが），結果の相対量には$\pm 5\ \%$の誤差がある．このような事実や，又太陽と Sirius A との間にあるに違いないモデルの明らかな変化を考え合わせると，(12)で示される両星の組成の相異が真実かどうか決めるのは難しい．今の場合としては，太陽と Sirius A が何れも，ここの議論の限界内で

$$X = 0.65 \pm 0.05;\quad Y = 0.31 \mp 0.05;\quad 1 - X - Y = 0.04 \pm 0.01 \quad (13)$$

としか結論できない．

恒星の内部やエネルギー生成の考察から導かれた組成(13)は恒星のスペクトル解析からの結果と驚くほどの良い一致を示している．後者では，恒星の大気で

$$X = 0.70 \pm 0.05;\quad Y = 0.28 \mp 0.05;\quad 1 - X - Y = 0.02 \pm 0.05 \quad (14)$$

を示している．

以上の計算が行なわれた当時は，導かれる密度，温度の条件（表 9 の太陽の欄参照）のもとで陽子－陽子反応が恒星のエネルギー源としてほぼ同程度に，炭素循環に匹敵することが判っていなかった［(§7.18')，(§8.2')参照］．このことを最初に指摘したのは 1950 年，Epstein と Oke であった．Epstein はそれ以来，炭素循環と陽子－陽子反応の両方のエネルギー源を考慮に入れて太陽に対するモデルを計算した．太陽に対する彼の暫定的な結果は

$$X = 0.82,\ Y = 0.17,\ T_c = 1.5 \times 10^7 \mathrm{K},\ \rho_c = 150\ \mathrm{gr/cc} \tag{15}$$

である．Epstein はまた，もし対流核が存在するならば質量の 8 % 以下を含み，恒星の半径の10 % 以下を占めるだろうということや，また僅か 30 % のエネルギーだけが対流核で作られるだろうということを見出だしている．(13)式と(14)式の“一致”から得られる結論は，今までの§で述べた理論が，これらの恒星に対して，まあまあ正しい方向に進んでいるということである．特に炭素循環は，太陽以上に高温な主系列星の主要なエネルギー源と考えて差し支えないだろう．この結論に達したことは重要なことであるが，幾分注意深い考察を要する理論の状況に注意しなければならない．それは前述の仮定，即ち平均分子量μおよび水素，ヘリウム量が内部で一定であるとした仮定である．このμ，X，Y一定の仮定は“詳細な”化学組成もまた恒星内部で一様であるかどうかという更に大きい問題に関係してくる．