

## Chapt. 4. 白色矮星の構造

### § 14. 縮退電子ガスの状態方程式

これまでの恒星構造の議論は理想気体の状態方程式（ボイル・シャルル Boyle-Charles の式）

$$p = (k/\mu H)\rho T \quad (1)$$

が妥当な第 1 近似として成り立つという仮定の下に進んできた。しかし、平均密度が  $10^5 \sim 10^6$  gr/cc の範囲に達する白色矮星を考えるようになれば、この仮定は成り立たなくなる。このような密度では物質は文字通り潰れてしまって完全電離の状態にある。従って、この条件の下では、古典的気体運動論に基づいて、

(1) 原子核や電子の体積が有限であるという点から、あるいは

(2) 帯電粒子間の静電引力または反発力の点から、

理想気体の法則からのずれが予想される。しかし、原子核や電子の半径が  $10^{-13}$  cm (1 fermi) という小さいものだから、(1) から予想される気体法則の不完全さは  $10^8$  gr/cc ほどの密度でも無視できることが確かめられる。また (2) から生ずるずれもそう重要ではないことが判る。

しかしながら、R. H. Fowler が最初に指摘したように、量子論や Pauli の禁制原理による制限から、古典論の気体法則からのずれの重大な原因が生ずる。周知のように Pauli の禁制原理は原子内の 2 つの電子が量子数の同じ組合せを持つことを許さない。しかし量子数は原子内の束縛電子と同様に自由電子についても割当てることができ、Pauli の原理は矢張り量子数の同じ組を持つ 2 つの自由電子を禁止する。与えられた容積に閉じ込められた電子に対して、量子論は 1 cc 当たり、運動量 ( $p, p + dp$ ) の範囲に

$$(2/h^3)4\pi p^2 dp \quad (2)$$

個の状態を割当てる。量子状態の数(2)は次のように理解してよい。6次元の位相空間を体積  $h^3$  の細胞に分割し、各細胞には、スピン spin の向きの異なる 2 個の状態が許される。

(2)式は運動量 ( $p, p + dp$ ) の自由電子に対して許される状態の数が、これだけしかないことを示しているので、Pauli の禁制原理によって

$$N(p)dp \leq (2/h^3)4\pi p^2 dp \quad (3)$$

でなければならない。ここで、 $N(p)dp$ は運動量 ( $p, p + dp$ ) を持つ電子の 1 cc 当たりの数である。他方、状態方程式(1)の基礎になっている Maxwell の速度分布の法則は、運動量 ( $p, p + dp$ ) の範囲の電子の数が、1 cc 中の電子総数  $N_e$  に対して

$$N(p)dp = \{N_e/(2\pi mkT)^{3/2}\} \cdot \exp(-p^2/2mkT) \cdot 4\pi p^2 dp \quad (4)$$

であることを予想させる。(3)、(4)を比較して、もし

$$N_e/(2\pi mkT)^{3/2} > 2/h^3 \quad (5)$$

となるほど  $N_e$  が大きくなれば、Pauli の原理に背くことになる。今、電子 1 個当たりの分子量  $\mu_e$  を用いて

$$N_e = \rho / \mu_e H \quad (6)$$

と置けば(5)の不等式は

$$\rho > 2 \cdot \{(2\pi mkT)^{3/2}/h^3\} \mu_e H = 8.1 \times 10^{-9} \mu_e T^{3/2} \quad (7)$$

と表わせる。これにより  $\mu_e = 2$ ,  $T = 10^6$  K に対して、密度  $\rho > 16$  gr/cc と  
な

る時に Maxwell 分布(4), 従って気体法則(1)からのずれを確実に予想しなければならない. 白色矮星内に見られるもっと大きい密度に対しては, それに応じて理想気体の状態方程式からの, もっと大きいずれを予想しなければならない. これが前述の Fowler の指摘である.

$\rho$ が(7)式の限界より著しく大きくなる時には, 図 14.10 から容易に判るように, そこに示された形の分布が実現する. 即ち, ある $p_0$ より小さい $p$ に対して

$$N(p) \sim (2/h^3)4\pi p^2 \quad (p < p_0) \quad (8)$$

$p_0$ を越える $p$ に対しては指数的に減少してしまう. 点線で示された Maxwell 尾部が全電子中に占める割合は, 温度一定で密度が次第に増大するにつれて次第に小さくなるだろうと考えられる. 高密度 (あるいはゼロ温度) の極限では

$$\begin{aligned} N(p) &= (2/h^3)4\pi p^2 & (p \leq p_0) \\ N(p) &= 0 & (p > p_0) \end{aligned} \quad (9)$$

の分布が実現すると予想される. (7)の不等式が強い禁制である限り, 分布関数のこの極限形(9)が妥当な第1近似を与えると想像してよい.

$\rho \gg 8.1 \times 10^{-9} \mu_e T^{3/2}$ で分布関数(9)がよい近似である場合に, 電子気体は Fermi-Dirac 統計の意味で高度に縮退していると言う.

完全に縮退した電子気体に対して $p$ の最大値 $p_0$ は

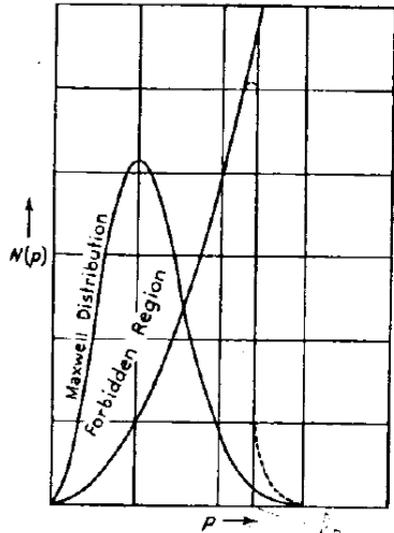


FIG. 14.10. Illustrating how, at large densities, the Maxwell distribution will violate the Pauli principle. The nature of the distribution which will be realized under these conditions is shown.

$$N_e = \int_0^{p_0} N(p) dp = (2/h^3) \int_0^{p_0} 4\pi p^2 dp = (8\pi/3h^3) p_0^3 \quad (10)$$

によって電子の粒子密度  $N_e$  と関係している。  $p_0$  は時に Femi threshold (閾値) と呼ばれる。

白色矮星内では  $10^5 \text{ gr/cc}$  を越える密度に達するので、内部の電子気体は上記の意味で高度に縮退していることが予想される。しかし天体物理学で考慮すべき1つの重要な要素がある。それは電子が白色矮星内でのように高密度で縮退する時、電子の相当数は光速に匹敵する速度を持つことになると言うことである。これは次のようにして確かめられる。(6), (10)により

$$p_0/mc = \{(3/8\pi)N_e h^3\}^{1/3} (1/mc) \sim 10^{-2} \mu_e^{-1/3} \rho^{1/3} \quad (11)$$

$\rho \sim 10^6$  程度の密度で  $p_0 \sim mc$  となるが、相対性理論から電子の速度  $v$  と運動量  $p$  との関係が

$$p = mv / \{1 - (v/c)^2\}^{1/2} \quad (12)$$

で与えられるので、  $p_0 \sim mc$  は  $v_0 \sim 0.7c$  の場合に相当する。更に高密度では、分布関数(9)の形のため、相対論的速度で運動する電子の割合は急激に増大する。縮退気体における圧力、密度関係式を導く場合に注意すべき重要な要素である。

縮退気体内の圧力を計算するのに定義によって圧力とは気体内の単位面積を通過して運ばれる運動量の割合であることを思い出そう。従って全く一般的に

$$P = (1/3) \int_0^\infty N(p) p v_p dp \quad (13)$$

が得られる、ここで  $v_p$  は運動量  $p$  に対応する速度である。速度が光速に近付いていることを予想し、特殊相対性理論に従って質量の変化を考慮し

$$v_p = (p/m) [1 / \{1 + (p/mc)^2\}^{1/2}] \quad (14)$$

と書かねばならない. (9), (13), (14)を組み合わせて, 今の場合に対して

$$P = (8\pi/3mh^3) \int_0^{p_0} [p^4/\{1 + (p/mc)^2\}^{1/2}] dp \quad (15)$$

を得る. 右辺の積分は初等的なもので, 積分すれば  $P$  を

$$P = A \cdot f(x) \quad (16)$$

の形で表わせる. ここで

$$A = \pi m^4 c^5 / 3h^3 = 6.01 \times 10^{22}; \quad x = p_0/mc$$

$$f(x) = x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3 \cdot \sinh^{-1} x \quad (17)$$

関数  $f(x)$  は  $x \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow \infty$  に対して次の漸近形をとる.

$$f(x) = (8/5)x^5 + O(x^7) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$f(x) = 2x^4 + O(x^2) \quad (x \rightarrow \infty) \quad (18)$$

パラメータ  $x$  により (6), (10) を用いて密度  $\rho$  を次のように表わせる.

$$\rho = Bx^3 \quad (19)$$

但し

$$B = (8\pi m^3 c^3 / 3h^3) \mu_e H = 9.82 \times 10^5 \mu_e \quad (20)$$

(16), (19) は高度に縮退した電子気体の状態方程式をパラメトリックに表現している.  $f(x)$  の漸近形 (18) から判るように,  $P$ ,  $\rho$  関係は

低密度 ( $\rho < 10^6 \mu_e \text{ gr/cc}$ ) で  $P \propto \rho^{5/3}$  法則 から  
高密度 ( $\rho > 10^6 \mu_e \text{ gr/cc}$ ) で  $P \propto \rho^{4/3}$  法則 まで  
変わることが判る.