

§ 15. 白色矮星の構造

自己の重力の下に平衡にある高度に縮退した物質は、白色矮星の構造にとって非常によく第1近似を与えるようである。従って完全に縮退した恒星の構造を考察することによって、これらの天体の研究を始めよう。

自己重力の下に平衡にある物質の分布を決定する式は既に述べた(1. 3), (1. 4)式であり、両者を組合わせて1つの式にすると

$$(1/r^2)(d/dr)\{(r^2/\rho)(dP/dr)\} = -4\pi G\rho \quad (1)$$

と書ける。この P , ρ に(14.16), (14.19)を代入して解かねばならないが、それは中心において定められた密度に対応し、また更に $r = 0$ で $M(r) = 0$ (あるいは同じことだが $dP/dr = 0$) の条件を満たすだろう。

この際、われわれは重粒子 (即ち、核) による圧力への寄与を無視している。これは電子が縮退しているという事実のために妥当なのである。即ち、このことは縮退状態方程式で与えられる圧力が $N_e kT$ を遥かに上回り、そして核によって及ぼされる圧力が高々 $N_e kT$ に等しくなり得ることを意味している。(14.16), (14.19)式の P , ρ を(1)に代入すると

$$(A/B)(1/r^2)(d/dr)[(r^2/x^3)\{df(x)/dr\}] = -4\pi GBx^3 \quad (2)$$

となるが、 $f(x)$ の定義(14.17)から容易に

$$\begin{aligned} (1/x^3)\{df(x)/dr\} &= \{8x/(x^2 + 1)^{1/2}\} \cdot (dx/dr) \\ &= 8(d/dr)(x^2 + 1)^{1/2} \end{aligned} \quad (3)$$

が計算できるので、(2)式は次のように書き替えられる

$$(1/r^2)(d/dr)[r^2(d/dr)(x^2 + 1)^{1/2}] = -(\pi GB^2/2A)x^3 \quad (4)$$

ここで変数変換

$$\begin{aligned}
 r &= \alpha\eta = (2A/\pi G)^{1/2}(\eta/By_0) = (7.71 \times 10^8 \text{ cm}/\mu_e y_0) \cdot \eta \\
 y &= (x^2 + 1)^{1/2} = \phi(x_0^2 + 1)^{1/2} = \phi y_0 \quad (x_0 = \text{const})
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

によって変数 r , x を η , ϕ に変換すれば(4)式は

$$(1/\eta^2)(d/d\eta)\{\eta^2(d\phi/d\eta)\} = -\{\phi^2 - (1/y_0^2)\}^{3/2}
 \tag{6}$$

となる. 定義により

$$\rho = Bx^3 = B(y^2 - 1)^{3/2} = By_0^3\{\phi^2 - (1/y_0^2)\}^{3/2}
 \tag{7}$$

が得られる. もし

$$\rho_c = B(y_0^2 - 1)^{3/2} = Bx_0^2
 \tag{8}$$

が中心密度を表わすものとすれば, われわれは(6)式を境界条件

$$\phi = 1; \quad d\phi/d\eta = 0 \quad (\text{at } \eta = 0)
 \tag{9}$$

で解かねばならない. 特定の y_0 の値の各々に対して(従って, 決められた中心密度 ρ_c の各々に対して)このような境界条件を満たす(6)の解 $\phi(\eta)$ は唯一つ存在する.

恒星の表面の境界は密度 $\rho = 0$ の所であり, η_1 が表面を表わすとすれば, (7)式より

$$\phi(\eta_1) = 1/y_0
 \tag{10}$$

である. このような構造の恒星の質量は(5), (7)を用いて

$$\begin{aligned}
M &= 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr = 4\pi\alpha^3 \int_0^{\eta_1} \rho \eta^2 d\eta \\
&= 4\pi\alpha^3 y_0^3 B \int_0^{\eta_1} \{\phi^2 - (1/y_0^2)\}^{3/2} \eta^2 d\eta
\end{aligned} \tag{11}$$

で与えられる．この式は(6)を用いて簡単になり

$$\begin{aligned}
M &= -4\pi\alpha^3 y_0^3 B \int_0^{\eta_1} (d/d\eta)\{\eta^2(d\phi/d\eta)\}d\eta \\
&= -4\pi\alpha^3 y_0^3 B \{\eta^2(d\phi/d\eta)\}_{\eta=\eta_1}
\end{aligned} \tag{12}$$

最後に(5)式により α を代入し

$$M = -4\pi(2A/\pi G)^{3/2} \cdot (1/B^2)\{\eta^2(d\phi/d\eta)\}_{\eta=\eta_1} \tag{13}$$

を得る．従って決まった中心密度を持つ構造は決まった質量を持つことになる．

(5), (6), (9), (13)式から $\rho_c \rightarrow \infty$ の時, $y_0 \rightarrow \infty$, $\phi \rightarrow$ 唯一の極限值, $M \rightarrow$ 唯一の極限值, $R \rightarrow 0$ となることが導ける．このことは限界質量の存在を確定する．

以上から, 任意に与えられた中心密度 ρ_c に対して, ある決まった質量と半径の唯一の構造が存在することが判る．このようにして構成された内部構造の性質が表 14.12 に与えられており, 更に図 14.11, 図 14.12 に図示されている．

完全に縮退した恒星の内部構造の密度と半径は, 白色矮星を説明するのに丁度要求される程度であることが判る．

多くの問題の中で, 完全縮退の恒星構造の最重要な性質は, それらの質量に上限が存在することである．この質量は

$$M_3 = 5.756\mu_e^{-2}M_\odot \tag{14}$$

で与えられる．縮退物質の状態方程式は厳密に言えば, この限界質量に対して半径は 0 ということになる．しかし, 勿論, もし M_3 より僅かに小さい質量から出発して, 例えば“外部から”それに物質を注ぎ込んで質量を次第に増してゆくとした場合, 実際に半径 0 が実現するという事は示唆されない．原子核

z

TABLE 14.12. THE PHYSICAL CHARACTERISTICS OF COMPLETELY DEGENERATE CONFIGURATIONS†

$\frac{M}{\odot} \mu_e^2$	$\rho_c \mu_e^{-1}, \text{ gm/cm}^3$	$\bar{\rho} \mu_e^{-1}, \text{ gm/cm}^3$	$R \mu_e, \text{ cm}$
5.756	∞	∞	0
5.753	9.82×10^{11}	2.00×10^{10}	5.14×10^7
5.748	2.48×10^{11}	5.33×10^9	7.99×10^7
5.740	8.78×10^{10}	2.00×10^9	1.11×10^8
5.725	3.10×10^{10}	7.62×10^8	1.53×10^8
5.682	7.83×10^9	2.21×10^8	2.30×10^8
5.615	2.76×10^9	8.92×10^7	3.10×10^8
5.51	9.85×10^8	3.70×10^7	4.13×10^8
5.32	3.37×10^8	1.57×10^7	5.44×10^8
4.87	8.13×10^7	5.08×10^6	7.69×10^8
4.33	2.65×10^7	2.10×10^6	9.92×10^8
3.54	7.85×10^6	7.9×10^5	1.29×10^9
2.95	3.50×10^6	4.04×10^5	1.51×10^9
2.45	1.80×10^6	2.29×10^5	1.72×10^9
2.02	9.82×10^5	1.34×10^5	1.93×10^9
1.62	5.34×10^5	7.7×10^4	2.15×10^9
0.88	1.23×10^5	1.92×10^4	2.79×10^9
0	0	0	∞

† The entries for $(M/\odot)\mu_e^2 = 5.51$ and smaller values are taken from S. Chandrasekhar, *M. N.*, **96**, 208 (1935); these were obtained from a direct integration of the basic differential equation governing these distributions of matter [see Mathematical Notes VII, Eq. (240)]. The entries for $(M/\odot)\mu_e^2 = 5.753$ to 5.615 (inclusive) are taken from a paper by A. Reiz [*Ap. J.*, **109**, 303 (1949)] in which a perturbation theory for configurations near the limiting mass is worked out.

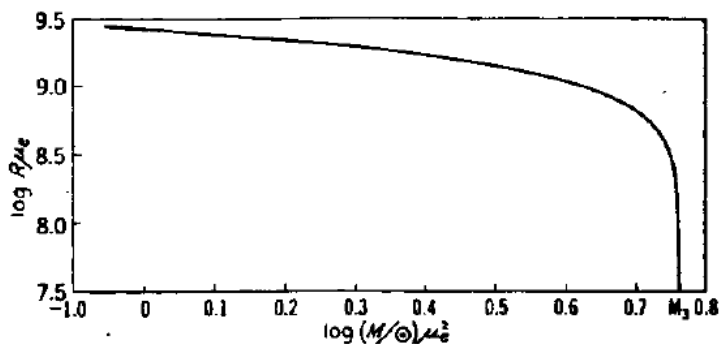


FIG. 14.11. The mass-radius relation for completely degenerate configurations.

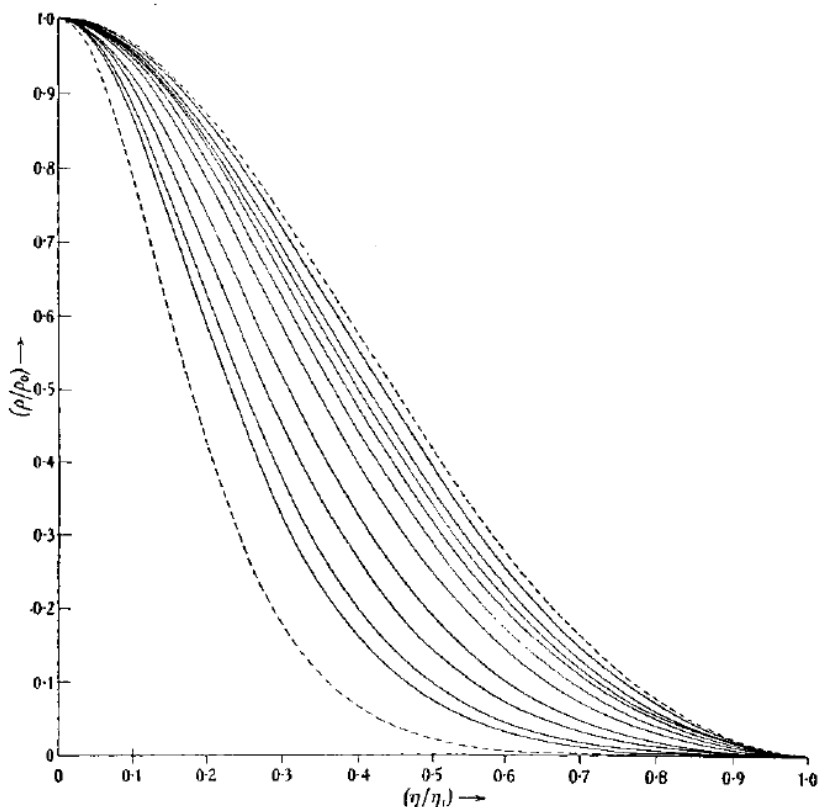


FIG. 14.12. The relative density distributions in the completely degenerate configurations. The upper dotted curve gives the distribution for the configuration of zero mass, and the lower dotted curve gives the corresponding distribution in the limiting mass M_3 . The inner curves represent the density distributions for the masses $(M/\odot)\mu^2 = 5.51, 5.32, 4.87, 4.33, 3.54, 2.95, 2.45, 2.02, 1.62,$ and $0.88,$ respectively, of Table 14.12.

のものの密度 ($\sim 10^{13}$ gr/cc) に近付くことが、他に何もなくても、このようなことが起こるのを妨げるし、そういうことは起こりそうにない。しかし、表 14.12 を見れば、 M_3 と僅か 1% しか違わない質量の中でさえ核の密度に達しないことが判る。従って、図 14.11 に示される質量—半径関係からは認め得る程のずれは予想できない。

さて、白色矮星が水素を全く含むことができず、 $\mu_e = 2$ であると信じ得る

理由を示そう. この μ_e に対して限界質量は

$$M_3 = 1.44M_{\odot} \quad (\text{for } \mu_e = 2) \quad (15)$$

である.

現実の白色矮星を考察しようとする場合, 先ず, それらを完全縮退した恒星構造だと見做すことが, どの程度に良い近似であるかを調べねばならない. この目的のために, 白色矮星の内部に入るとつれて温度の増大する割合を計算し, また気体状 *envelope* の広がりやを決定しなければならない. これらの恒星の大気に働く重力が非常に強いので, 密度は温度に比べて極めて急速に増大してゆくので, 恒星内部にそれ程深く入り込まなくても, 理想気体の状態方程式で得られる圧力は縮退状態方程式で得られる圧力よりも小さくなってしまふ. このことは縮退が全く急激に始まることを意味している. そして, 一旦縮退が起こってしまえば, その物質は極めて高度な熱伝導体となり, また同時に輻射に対しても非常に透明になる. その結果, 恒星の質量の大部分を通じて温度はほぼ一定になる. Marschak & Schatzman により, 白色矮星の内部の温度が $10^7 \sim 1.5 \times 10^7$ K 近くに違いないと推定されているが, このような指摘は全て, われわれが完全縮退の恒星構造を白色矮星のかなり正確な記述だと見做していることを裏付けている.

理論と観測との比較をするに当たって, 当然, 理論の最も著しい予想である限界質量の存在と, (質量が増大すると半径が減少するという) 特異な質量-半径関係の確認を採ることになる.

Kuiper や Luyten の近年に発見した新しい白色矮星の数は極めて多いのにも関わらず, これらの天体の純粋に観測的な質量-半径関係の決定はまだ存在しない. しかし利用できる証拠から明らかに指摘できることは白色矮星の間で観測された平均密度の範囲が $10^5 \sim 10^8$ gr/cc, 即ち因子にして 10^3 倍の範囲だということである. これから半径では 10 倍の因子の範囲があるようである.

さて限界質量の予想は, 相対論的な速度に伴う質量の変化を含むことによるもので, それによって状態方程式は低密度での $\rho^{5/3}$ 法則から, 高密度での $\rho^{4/3}$ 法則まで変わる (ここの高密度, 低密度は 10^6 gr/cc を規準にしての意味).

もし相対論的な効果を考慮しなければ、全ての密度に対して $\rho^{5/3}$ 法則が正確に成り立つことが見出だせる筈である。そして(14.16), (14.19)の法則の代わりにこの法則を仮定するならば、図 14.11 で図示された質量—半径関係の代わりに

$$\log R = -(1/3) \log M - (5/3) \log \mu_e - 1.397 \quad (16)$$

が得られる筈である（この式中 M , R は太陽単位で表わしてある）。この式によれば、半径での 10 倍の範囲は質量での 1,000 倍の範囲を意味しており、このことは最小の白色矮星に予想される質量が極めて大きいという事実を別にしても一見して全くありそうにないことである。他方、正確な状態方程式に基づいて導かれた質量—半径関係は、それらの同じ恒星に対しても妥当な質量を定める。これが決定的証拠にはならないにしても、その基本的な予想では、理論が支持されるように思われる。

最後に白色矮星の平均分子量と化学組成の問題に移ろう。初めに述べたように白色矮星はそう多くの水素を含むことはできない。この理由は、もし恒星の本体内に相当量の水素があるとすれば、そのような高密度の下では、これらの恒星で観測される小さい光度とは矛盾するほどのエネルギー量が陽子—陽子反応で生成されるからである。実際、Schatzman & Lee の研究によれば、この条件から決まる水素量の限界は非常に低く、事実上、常に水素が含まれていないと見做して差し支えない。この結論はこれらの恒星のスペクトル中に水素線が観測されている事実とは矛盾しない。何故なら矢張り Schatzman が示したように、白色矮星の強い重力場の影響で、内部にどれほどの水素があったとしても $10^6 \sim 10^7$ 年程度の時間がたてば外方に拡散してしまうに違いない。従って、白色矮星中の水素は全て下の重元素の上に浮いて大気中にある。従って白色矮星の構造を解析するのに $\mu_e = 2$ と仮定して差し支えない。