§2．恒星内部の電離状態 The ionization state in the stellar interior

恒星内部の概略の温度を推定するため，われわれは理想気体の状態方程式を用い，それに含まれる平均分子量 μ が，詳しい理論から$0.5 < \mu < 2.0$の範囲にあると述べておいた．次にその理由を調べよう．

あるμの値を仮定したとする．すると§1 で求めておいた不等式から恒星内部の概略の温度が推定できる．この温度では，広範囲の密度の値に亘って，殆どの元素が相当数の電子を失ってしまっていて，それが占める体積が著しく小さくなり，それによる気体法則からのずれは無視できることがわかり，また電離のために生ずる自由電子の数が極めて多く，平均分子量 μ（酸素 $\mathrm{O} = 16$として，全ての自由粒子 1 個当たりの平均の質量）を決定するのは主に H と He の相対量であって，その他の元素の相対量には余り依存しないことがわかる．従って問題はあるμの値を仮定すると温度が決まる．温度が決まると原子の電離状態が決まる．電離状態が決まるとμが決まる．この最後に得られたμの値が最初に仮定したμの値に等しいかどうかである．このような議論はもっと定量的に次のように考える．

電離平衡式

$$\mathrm{X}^{(n)} \leftrightarrow \mathrm{X}^{(n-1)} + \mathrm{e} \tag{1}$$

を考える．ここで $\mathrm{X}^{(n)}$，$\mathrm{X}^{(n-1)}$はそれぞれ，まだn個，$(n-1)$個の束縛電子を保有しているイオン（または原子），e は自由電子を表している．これらの 1 cc 当たりの粒子密度を$N^{(n)}$，$N^{(n-1)}$，N_eと書く．また，この電離に対する電離ポテンシャルを $\chi^{(n)}$とすればサハの熱電離の式により

$$N^{(n-1)}\,N_e/N^{(n)}$$
$$= \{(2\pi mkT)^{3/2}/h^3\}\{2g^{(n-1)}/g^{(n)}\}\exp\{-\chi^{(n)}/kT\} \tag{2}$$

あるいは電子圧 $P_e = N_e kT$ を用いて書けば

$$N^{(n-1)}\,P_e/N^{(n)}$$

$$= \{(2\pi m)^{3/2}(kT)^{5/2}/h^3\}\{2g^{(n-1)}/g^{(n)}\}\exp\{-\chi^{(n)}/kT\} \qquad (2')$$

但し，$g^{(n)}$，$g^{(n-1)}$はそれぞれ，イオン X$^{(n)}$，X$^{(n-1)}$の分配関数である．
ここで

$$\begin{aligned}\exp\{\psi/kT\} &= (2/N_e)\{(2\pi mkT)^{3/2}/h^3\} \\ &= (2/P_e)\{(2\pi m)^{3/2}(kT)^{5/2}/h^3\}\end{aligned} \qquad (3)$$

と置いて Dominant potential ψを定義すれば，ψの値により電離状態を表すことができる．何故なら，（統計的分配関数の因子を無視して）

$$N^{(n-1)}/N^{(n)} = \exp\{(\psi - \chi^{(n)})/kT\} \qquad (4)$$

と書けるので，例えばもし$\psi \sim \chi^{(n)}$ であれば，$N^{(n-1)} \sim N^{(n)}$，即ちn個の束縛電子を持つイオン X$^{(\mathrm{n})}$と，それが更に 1 回電離して$(n-1)$個の電子を残す X$^{(\mathrm{n-1})}$との数が等しくなっている電離状態であることを示すからである．そこで第 1 近似として

$$\psi \sim \chi^{(n)} \qquad (5)$$

の時，原子番号Zの原子は殆ど$(Z-n)$回電離している（束縛電子はn個以下になっている）と言うことができる．(3)式は次のように書ける．

$$\psi = 198.416(T/10^6)[(3/2)\log(T/10^6) - \log N_e + 24.684]\ \mathrm{eV} \qquad (6)$$

あるいは

$$\psi = 198.416(T/10^6)[(5/2)\log(T/10^6) - \log P_e + 14.824]\ \mathrm{eV} \qquad (6')$$

今，気体が 1 種類の元素（原子番号Z，原子量A）から成ると考えよう．それ

が$(Z-n)$回電離すれば，生じた自由電子の粒子密度N_eは

$$N_e = (Z-n)\rho/AH \tag{7}$$

これを(6)式に代入すると

$$\psi = 198.416(T/10^6) \times [(3/2)\log(T/10^6) - \log\rho + \log\{\mathrm{A}/(Z-n)\} + 0.904]\ \mathrm{eV} \tag{8}$$

ここで太陽中心の最新の理論値

$$T_c = 1.55 \times 10^7\ \mathrm{K}$$
$$P_c = 3.4\ \ \times 10^{17}\ \mathrm{dyn\ cm^{-2}}$$
$$\rho_c = 160\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$$

を用いて調べよう．このように高密度の物質に理想気体として Boyle-Charles の法則を適用してよいだろうか．もし原子が中性原子のままであれば，その半径は10^{-8} cm 程度，例えば Mg ($\mathrm{Z} = 12$，$\mathrm{A} = 24.3$) 原子では1.58×10^{-8} cmで，原子 1 個の占める体積は1.65×10^{-23} cm^3 である．従って Mg 原子を隙間なくぎっしり詰め込んだと仮定しても，その密度は $AH/1.65 \times 10^{-23} \sim 2.45$ g cm^{-3}にしかならない．つまり気体のままでは上のような高密度にはなり得ない．

しかし，太陽内部では高温のため，原子の電離が高度に進み，半径の遥かに小さいイオンになってしまっている．電離が著しく進んでいることが予想されるので，(6')式に$P_e \sim P_c$と置いて太陽中心の値を当て嵌めてみると

$$\psi_c \sim 825\ \mathrm{eV}$$

となる．大体この電離ポテンシャルのものまでは電離してしまっていることになる．原子番号Zの原子の最後の 1s 電子の電離ポテンシャルは近似的に

$13.598\ Z^2\ \mathrm{eV}$と表せるので，窒素N ($Z = 7$)までは完全に原子核だけになっている．

マグネシウムMg ($Z = 12$，$A = 24.3$)の電離ポテンシャルについては

$(1s)^2(2s)$	Mg X	367.5 eV
$(1s)^2$	Mg XI	1761.8 eV
$(1s)$	Mg XII	1963 eV

だから，K 殻電子($n = 1$) 2個が残っているだけで，それより上位の電子はみな熱電離してしまっている．このような$(1s)^2$ Mg XIイオンの半径は

$$r_1 \sim e^2\ Z/2\chi \sim 2.86 \times 10^{-10}\ \mathrm{cm}$$

体積は$9.79 \times 10^{-23}\ \mathrm{cm}^{-3}$と小さくなっており，もしぎっしりと詰め込めるとすれば$\rho \sim 4.12 \times 10^5\ \mathrm{g\ cm}^{-3}$の高密度にまで詰め込めることになる．これから考えて太陽の中心で$160\ \mathrm{g\ cm}^{-3}$という密度はイオン 1 個当たりの空間はイオンの大きさの 2,500 倍以上もあり，理想気体の法則が充分適用できることがわかる．

酸素 O ($Z = 8$, $A = 16$) の最後の電離ポテンシャルは871.39 eVであるから，(8)式によれば，$T = 5 \times 10^6$ K， $\rho \leq 25\ \mathrm{g\ cm}^{-3}$ に対して酸素原子は全ての束縛電子を失っている．酸素の最後から 2 番目の電離ポテンシャルは739.32 eVであるから，$T = 5 \times 10^6$ Kでは，$25\ \mathrm{g\ cm}^{-3} < \rho < 40\ \mathrm{g\ cm}^{-3}$ の範囲の密度に対して，酸素原子は多くて2個しか束縛電子を持てないことがわかる．このように広範囲の密度の違いに対しても平均分子量μは$16/9 = 1.78$と$16/7 = 2.29$の間で僅かに変化するだけである．

同様に鉄Fe($Z = 26, A = 55.8$)では，$T = 5 \times 10^6$ Kで，$\rho \leq 2.4\ \mathrm{g\ cm}^{-3}$に対して多くて4個の電子，$2.4\ \mathrm{g\ cm}^{-3} < \rho < 6.5\ \mathrm{g\ cm}^{-3}$ に対して多くて7個の電子しか残しておけない．$T = 10^7$ Kでは，それぞれに対応する密度は$65\ \mathrm{g\ cm}^{-3}$と$116\ \mathrm{g\ cm}^{-3}$である．そして平均分子量μの違いは$55.8/23 = 2.43$と$55.8/20 = 2.79$とに過ぎない．

このような数字から次のような結論が得られる．恒星の内部で予想される条件では，豊富な元素はかなり電離が進んでおり，理論の第1歩として理想気体

の法則からのずれは無視してよい．また恒星の中で最も豊宴な元素 H と He は，それぞれ陽子，α粒子，自由電子に完全に分離している．

以上の議論から，平均分子量μについては殆どの目的に対して次のような簡単な考察で充分なことがわかる．種々な元素から成る混合気体を考え，原子量A_Zの元素は気体 1 g 中にX_Z g 含まれているとする．このことを「その元素の重さによる化学組成 Chemical abundance がX_Zである」と言う．更にこの原子番号Zの原子は，電離によって平均$A_Z\bar{n}_Z$個の自由粒子（電離した自由電子と残っているイオン自体の和）になっていると考える．すると混合気体 1 cm³中の自由粒子の総数Nは

$$N = \sum_Z (\rho X_Z / A_Z H)\, A_Z \bar{n}_Z = (\rho/\mathrm{H}) \sum_Z X_Z\, \bar{n}_Z \tag{9}$$

ここで$\sum_Z$は混合気体を作る全ての元素についての和である．従って気体圧は

$$P_\mathrm{g} = N \cdot kT = (\rho k / H)(\textstyle\sum_Z X_Z\, \bar{n}_Z) T \tag{10}$$

これを(1.6)式と比較すれば

$$\mu = 1/(\textstyle\sum_Z X_Z\, \bar{n}_Z) \tag{11}$$

が得られる．上で考察したように，恒星内部の条件では H と He は完全に電離しており，これらの元素に対して

$$\bar{n}_1 = 2 \quad \text{および} \quad \bar{n}_2 = 3/4 \tag{12}$$

他の全ての原子も高度に電離が進んでいることから，充分良い近似で

$$\bar{n}_Z \sim (Z+1)/A_Z \sim Z/A_Z \sim 1/2 \tag{13}$$

と書くことができる．普通，H と He に対する化学組成X_1，X_2は特別に，そ

れぞれ X, Y，その他の元素は $Z\ (= 1 - X - Y)$ で表すが，(12)，(13)を(11)に代入すれば

$$\mu = 1/[2X + (3/4)Y + (1/2)(1 - X - Y)] \tag{14}$$

簡単にすれば

$$\mu = 2/(1 + 3X + 0.5Y) \tag{15}$$

この式を見れば，種々の化学組成に対して μ が $0.5 < \mu < 2.0$ の範囲にあることがわかる．

1 cm^3 当たりの自由電子の粒子密度 N_{e} は一般的に書けば

$$N_{\mathrm{e}} = (\rho/H)\sum_Z (X_Z/\mathrm{Az})(A_Z\bar{n}_Z - 1) \tag{16}$$

(12)，(13)で表せる近似では

$$N_{\mathrm{e}} = (\rho/H)[X + (1/2)Y + (1/2)(1 - X - Y)]$$

即ち

$$N_{\mathrm{e}} = (1/2)(\rho/H)(1 + X) \tag{17}$$

μ および N_{e} の式 (15)，(17)を見てわかるように，恒星内部における μ の決定の主な不確かさは H と He の化学組成 X, Y の不確かさに依ることがわかる．後に述べるように，恒星の構造論の主要目的の一つが恒星内部におけるこれらの化学組成の知識を求めることである．

★太陽中心における粒子のエネルギー

太陽の中心部におけるエネルギーを調べる．量子統計力学によれば気体粒子

1 個当たりの運動エネルギーは

$$\varepsilon_k = (3/2)kT$$

であるから，これに $T = 1.55 \times 10^7$ K を代入すると

$$\varepsilon_k = 3.21 \times 10^7 \text{ erg} = 2.00 \times 10^3 \text{ eV}$$

このエネルギーを

$$\varepsilon_k = (1/2)mv^2$$

で電子の速度 v に換算してみると

$$v = 2.65 \times 10^9 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

となり，光速の 1 割弱である．また

$$\varepsilon_k = (3/2)\mu H V^2$$

と置いて，原子量 μ のイオンの速度 V に換算してみると

$$\text{V} = 6.22 \times 10^7 \mu^{-1/2} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

マグネシウム Mg($Z = 12,\ A = 24.3$) イオンでは

$$V = 1.26 \times 10^7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

1 cm^3 中の気体粒子の数は $\rho/\mu H$ だから，1 cm^3 当たりの運動エネルギーは

$$E_k = (\rho/\mu H)\cdot(3/2)kT$$

これに ρ_c~160 g cm^{-3}，μ~1 を代入すれば

$$E_k \sim 3.09\times10^{17}\ \mathrm{erg\cdot cm^{-3}}$$

となる．

★太陽の中心部の輻射，即ち光量子のエネルギー

ウィーン Wien の変移法則

$$\lambda_m T = 0.289, 780$$

に $T = 1.55\times10^7$ K を代入すると

$$\lambda_m \sim 1.87\times10^{-8}\ \mathrm{cm} = 1.87\ \text{Å}$$

即ち，輻射は軟 X 線 SoftX-ray 程度である．また Stefan の法則から輻射エネルギー密度は

$$u = aT^4 \qquad (a = 7.5641\times10^{-15}\ \mathrm{erg\cdot cm^{-3}\cdot deg^{-4}})$$

だから，これにT_cを用い

$$u_c = 4.366\times10^{14}\ \mathrm{erg\cdot cm^{-3}}$$

E_kとu_cを比較してみると，太陽では気体の運動エネルギーに対して，まだまだ輻射エネルギーが小さく，従って輻射圧P_r，はガス圧P_gに比べて無視できる．しかし，高温，大質量の恒星になると，次第に輻射エネルギーの割合が大きくなり，その強烈な輻射圧のために恒星そのものの安定性が問題になる．

★太陽定数

太陽定数から得られる太陽表面でのエネルギー放出量 Emittance

$$F = \sigma T_e^4 = 6.284 \times 10^{10}\ \mathrm{erg \cdot cm^{-2} \cdot sec^{-1}}$$

は太陽中心部の輻射エネルギー密度u_cに比べて極めて小さい．即ち，太陽は内部に莫大なエネルギーを保有しながら，その放出は微々たるものだとも言える．このことは輻射が恒星の内部を通して洩れにくい，即ち恒星内部の物質が輻射に対して極めて不透明で，恒星内部の状態が，理想的に密閉された状態に近いことを意味している．われわれがプランク Planck の空洞輻射（黒体輻射）の法則を適用できるのはこのような状態に基づいている．