§３．恒星内の熱輸送の機構

恒星は光度 Luminosity Lで示される割合で，外部空間に絶えず輻射を放出している（例えば，太陽では$L_{\odot} = 3.86 \times 10^{33}$ erg・sec^{-1}）．このことは，合計Lの割合で遊離されるエネルギー源が恒星の内部に分布していることを意味している．われわれは後ほど，このエネルギー源である原子核反応の仮定を考えるが，ここでは観測される光度Lに等しい熱エネルギーの連続的な流れが，あたかも熱機関のように，高温領域から低温領域へと熱の流れによって保たれていることだけを考えよう．従って恒星の内部では温度の傾斜が保たれていると想像され，熱の輸送の機構が問題になる．

熱の輸送には伝導・対流・輻射の 3 種類の過程がある．恒星物質の熱伝導度は（白色矮星のような特殊条件以外では）余りにも小さ過ぎて，太陽の場合に推定したように，10^7K以上もある中心温度を保てない．残る熱輸送の過程は対流と輻射であるが，どちらであるかを決めなければならない．一般的に言って，対流は、対流がない場合に生ずる温度傾斜が、僅かな温度の変動に対して不安定な場合に起こる．言い換えれば，結果的に生じた温度傾斜が温度の小変動に対して安定な場合に限り，熱は輻射で輸送されると思われる．従って先ず輻射平衡の条件で温度傾斜の式を求め，次にそれが実現するための条件を議論しよう．

恒星内部の条件を考える時，どの部分についても局所的に温度輻射の法則（および，実際的に，全ての熱力学的・統計力学的な法則）が適用できると認めなければならない．それは，基本的には次のような理由による．われわれは太陽の中心で温度は2×10^7 K 程度であることを知った．太陽半径は7×10^{10} cmだから，太陽内部の平均の温度傾斜は3×10^{-4} K・cm^{-1}という緩やかさである．また後に述べるように，恒星内部の物質は輻射に対して非常に有効な吸収体で，極めて不透明であって，恒星内部のどの点の物質も，周囲の僅か数mm離れた物質からも有効に遮蔽されている．事実，恒星の内部では「一寸先も見えない」．従って局所的には，実験室でも実現し得ないほどの熱力学的平衡の条件が実現している．従って恒星内部の各点の輻射がプランク Planck の法則により，その点の局所的な温度Tだけで決まり

$$B_\nu(T) = (2h\nu^3/c^2)[1/\{\exp(h\nu/kT) - 1\}] \tag{1}$$

だと考えてそう誤差はない．これに対応する輻射圧の式は(1.5)，(1.38)より

$$P_\mathrm{r} = (4\pi/3c)\int_0^\infty B_\nu\,\mathrm{d}\nu = (8\pi^5k^4/45c^3h^3)T^4 = (1/3)aT^4 \tag{2}$$

である．

さて，熱の輸送が輻射で行なわれる時，恒星内部の温度傾斜は

$$\mathrm{d}P_\mathrm{r}/\mathrm{d}r = \mathrm{d}\{(1/3)aT^4\}/\mathrm{d}r = \kappa L(r)\rho/4\pi cr^2 \tag{3}$$

で与えられることを説明する．$L(r)$は半径rの球面を通って 1 秒間に流れる輻射エネルギーの量（単位は erg），κは不透明度係数 Coefficient of opacity である．κの定義は，1 cm^2 当たり質量 $\mathrm{d}m$の薄層が，それに垂直に入射する輻射エネルギーの $\kappa\cdot\mathrm{d}m$倍だけ吸収することで表わす（質量吸収係数）．(3)式を書き換え

$$-\mathrm{d}P_\mathrm{r} = \{L(r)/4\pi r^2\}\kappa\rho\cdot\mathrm{d}r(1/c) \tag{4}$$

とすれば物理学的な意味がよくわかる．左辺は第 1 図の小体積（半径rの点で，半径方向に置かれた面積 1 cm^2，厚み $\mathrm{d}r$の薄い物体）の上下両面に垂直に働く輻射圧の差である．従って$-\mathrm{d}P_\mathrm{r}$ は輻射の流れによって，この小体積が受け取る運動量の割合である．$L(r)$は半径rの球の全面を横切って，毎秒流れる輻射エネルギーの量だから，$L(r)/4\pi r^2$ はその球面の単位面積当たりの流れの割合，従って今考えている小体積を流れる割合である．小体積の質量は$\rho\mathrm{d}r$だから，κの定義によって，小体積に流れ込んだ輻射エネルギー$L(r)/4\pi r^2$は，その$\kappa\rho\cdot\mathrm{d}r$倍が吸収される．これによって小体積が受け取る運動量は，吸収エネルギーを光速cで割れば得られる．それが$-\mathrm{d}P_\mathrm{r}$に等しいのである．

この説明は(4)式の物理学的な意味を明らかにはするけれども，数学的に厳密にこの式を導くには，理論物理学に基づいて，<u>各周波数に対する吸収係数</u>

$\underline{\kappa_\nu}$が適当に定義できるという事実を認めねばならない．κ_νの定義は，面積 1 cm^2当たり質量$\mathrm{d}m$の物質の薄層が，周波数(ν，$\nu + d\nu$)の輻射に曝された時, それが入射エネルギーの $\kappa_\nu \mathrm{d}m$ 倍だけ吸収すると言うことである．しかし，それを認める時は，κが適当に定義されたκ_νの調和平均:

$$(1/\kappa) = \int_0^\infty [1/(\kappa_\nu\{1 - \exp(-h\nu/kT)\})]\,(\mathrm{d}B_\nu/\mathrm{d}T)\mathrm{d}\nu / \int_0^\infty (\mathrm{d}B_\nu/\mathrm{d}T)\mathrm{d}\nu \qquad (5)$$

である場合に限り，温度傾斜が(3)式の形で与えられることがわかる．これはいわゆるロスランド Rosseland の平均吸収係数である．

もし恒星の内部で輻射の吸収に与る物理過程がわかったならば，量子論に従って，この過程の吸収断面積が求められ，それから得られるロスランド平均吸収係数を(1)式に代入すれば，求めようとしている輻射過程による温度傾斜が得られるはずである．しかし，恒星の不透明度 opacity の詳しい議論は後にして，ここでは(3)式で与えられる温度傾斜が温度の小変動に対して安定であるための条件を考えてみよう．

先ず便宜的に(1.3)式と(3)式を組合せ

$$\mathrm{d}P_\mathrm{r}/\mathrm{d}P = \kappa L(r)/\{4\pi c G M(r)\} \qquad (6)$$

を得る．ここでエネルギー遊離率の，恒星全体としての平均$\bar{\varepsilon} = L/M$と，半径r以内での平均$\overline{\varepsilon(r)} = L(r)/M(r)$との比を$\eta$とし

$$\eta = \{L(r)/M(r)\} \div (L/M) = \overline{\varepsilon(r)}/\bar{\varepsilon} \qquad (7)$$

とすれば，(6)式は

$$\mathrm{d}P_\mathrm{r}/\mathrm{d}P = L\kappa\eta/4\pi c G M \qquad (8)$$

となる．この式を$r = r$から$r = R$まで積分し

境界条件：恒星の表面$r = R$で$P = P_r = 0$ (9)

を用いると

$$P_{\mathrm{r}} = L\overline{\kappa\eta(r)}P/4\pi cGM \tag{10}$$

を得る．ここで

$$\overline{\kappa\eta(r)} = (1/P)\int_0^{P(r)} \kappa\eta \mathrm{d}P \tag{11}$$

は半径rより外部における$\kappa\eta$の，Pを荷重とした荷重平均値である．(8)式と(10)式を組合わせると

$$(\mathrm{d}T/T)_{\mathrm{rad}} = (1/4)(\mathrm{d}p_{\mathrm{r}}/p_{\mathrm{r}}) = (1/4)\{\kappa\eta(r)/\overline{\kappa\eta(r)}\}(\mathrm{d}P/P) \tag{12}$$

を得る．

熱の輸送が輻射だけで行なわれている時は，常に(12)式の温度傾斜が成立っていなければならない．この輻射傾斜（輻射平衡の場合の温度傾斜）の安定性を調べるために，恒星の内部で最初，温度T，密度ρであった質量要素δmが，突然温度増加$\Delta T(> 0)$をしたと仮定しよう．すると，この要素は，その周囲に対して，ある決まった量の圧力$\delta P(> 0)$を及ぼすだろう．それは膨張し，周囲より希薄になり，そのために浮力を生じて恒星の外方へ押し上げようとする力を受けることになる．問題は温度の小変動から起こるこのような物質の移動が，どの条件の下で減衰し，平衡が回復できるかである．この解答を出すには，その擾乱を生じた要素δmの，その後の移動を追跡しなければならない．この変移要素δmは運動につれて瞬間瞬間，常に周囲と圧力平衡を保つように膨張・収縮をすると考えられる．即ち周囲の物質からこの要素に及ぼされる圧力は，常にこの要素が周囲の物質に及ぼす圧力に等しいと考えられる．その上,

この圧力平衡は全く急速に起こるので，外部からその要素へ熱の伝達はそれほど生じないと考える．言い換えれば，この要素は移動の期間中，周囲の物質と圧力平衡を保つように断熱的に adiabatically 温度を変えるのだと考えられる．

さて，理想気体では準静的（可逆）断熱変化の場合，γを定圧比熱C_{V}と定容比熱C_{P}の比$\gamma = C_P/C_V$として

$$p_{\mathrm{g}}V^{\gamma} = \mathrm{constant} \qquad \text{(ボアッソンの法則)} \tag{13}$$

の関係があり，また

$$TV^{\gamma-1} = \mathrm{constant} \tag{14}$$

の関係がある．この両式からVを消去し，γとして単原子気体 Monatomic gas の値$\gamma = 5/3$を用いれば，断熱過程の間に生ずる圧力・温度の増加には

$$(\mathrm{d}T/T)_{ad} = 0\,.4(\mathrm{d}p_{\mathrm{g}}/p_{\mathrm{g}}) \tag{15}$$

の関係がある．これを拡張して，輻射が存在する時にこの関係がどうなるかを調べるために，一般的に物質と輻射が共存する場合の断熱方程式を求めよう．

理想気体の状態の物質と輻射とが含まれる系の内部エネルギーは 1 g 当たり

$$U = aVT^4 + C_VT \tag{16}$$

ここで$aT^4 = (u)$は輻射エネルギー密度，$V(= 1/\rho)$は物質 1 g当たりの体積である．熱力学第 1 法則によって，この内部エネルギーの増加

$$\mathrm{d}U = (\partial U/\,\partial T)_V\mathrm{d}T + (\partial U/\,\partial V)_T\mathrm{d}V$$

は，この系に与えられる熱量dQと，外部からこの系に対してなされる仕事$W = -P\mathrm{d}V$の和に等しく

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q - P\mathrm{d}V$$

である．従って断熱方程式(dQ =0)は

$$\mathrm{d}Q = (\partial U/\partial T)_V \mathrm{d}T + (\partial U/\partial V)_T \mathrm{d}V + P\mathrm{d}V = 0 \tag{17}$$

この場合Pは全圧力

$$P = p_r + p_g = (1/3)aT^4 + (C_P - C_V)(T/V) \tag{18}$$

理想気体では$C_P = C_V + k/\mu H$ の関係がある．
(16)式からUの微分を計算してみると

$$(\partial U/\partial T)_V = 4aVT^3 + C_V = (T/V)\{12p_r + p_g/(\gamma - 1)\} \tag{19}$$
$$(\partial U/\partial V)_T = aT^4 = 3p_r \tag{20}$$

(18)～(20)式を(17)式に代入すれば

$$\{12p_r + p_g/(\gamma - 1)\}(\mathrm{d}T/T) = -(4p_r + p_g)(\mathrm{d}V/V) \tag{21}$$

が得られる．(18)式の全微分を計算すれば

$$\mathrm{d}P = (4p_r + p_g)(\mathrm{d}T/T) - p_g(\mathrm{d}V/V) \tag{22}$$

(21)，(22)式は組合わせて parametric にP，V，Tの中の 2 個の関係を表わしている．(1.30)式で定義した$\beta(= p_g/P)$を用いて(21)，(22)を表わすと

$$\{12(1-\beta) + \beta/(\gamma - 1)\}(\mathrm{d}T/T) = (4 - 3\beta)(\mathrm{d}\rho/\rho) \tag{23}$$
$$\mathrm{d}P/P = (4 - 3\beta)(\mathrm{d}T/T) + \beta(\mathrm{d}\rho/\rho) \tag{24}$$

但し$\rho = 1/V$である．恒星の中で重要な$\gamma = 5/3$では，(23)式は

$$\mathrm{d}T/T = \{2(4-3\beta)/3(8-7\beta)\}(\mathrm{d}\rho/\rho) \tag{25}$$

(24)，(25)式から逐次$\mathrm{d}T/T$および$(\mathrm{d}\rho/\rho)$を消去すれば

$$\mathrm{d}P/P = \{(32-24\beta-3\beta^2)/3(8-7\beta)\}(\mathrm{d}\rho/\rho) \tag{26}$$
$$\mathrm{d}P/P = \{(32-24\beta-3\beta^2)/2(4-3\beta)\}(\mathrm{d}T/T) \tag{27}$$

従って，輻射が圧力や内部エネルギーに寄与する場合に(15)式に対応する式は

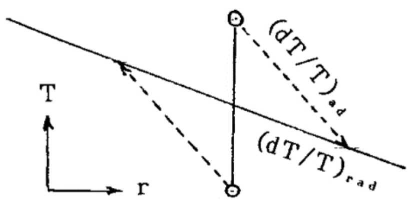
$$(\mathrm{d}T/T)_{ad} = \{2(4-3\beta)/(32-24\beta-3\beta^2)\}(\mathrm{d}P/P) \tag{28}$$

となる．もし輻射圧が無視できる時は$\beta = 1$で，(28)式は(15)式に戻る．

さて，前の議論に戻り，その移動期間中，変移要素の温度は周囲とは異なった割合で変化することになる．この要素は周囲と圧力平衡にあると仮定しているから，もし

$$(\mathrm{d}T/T)_{ad} > (\mathrm{d}T/T)_{rad} \tag{29}$$

であれば，要素δmはある距離だけ外方に移動した点で，その周囲と同じ温度・圧力・密度となる．要素は慣性のためその点を行き過ぎるかも知れないが，やがて周囲に溶け込み，とにかく最初の擾乱は衰える．



逆に最初，要素δmが温度の低下を生じたとすれば，それは周囲より密度が高くなり，もっと高密の領域へ沈下するだろう．もし要素がやは

り周囲と圧力平衡を保って断熱的に移動し，そして(29)式の条件が満たされていれば，その要素の物理的性質は間もなく周囲の物理的性質に等しい点に達するだろう．このような考察から次のように結論できる：

もし条件(29)が満たされるならば，輻射平衡は安定であって，対流は起こらない

(12)，(28)式を用いて，安定の条件(29)式を書換えれば

$$\kappa\eta(r)/\overline{\kappa\eta(r)} \leq 8(4-3\beta)/(32-24\beta-3\beta^2) \qquad (30)$$

と表わすことができる．表には種々のβの値に対して(30)式の右辺の数値が示してある．輻射圧 p_{r}が無視できる重要な場合では$\beta = 1$で，その条件は

$$\kappa\eta(r)/\overline{\kappa\eta(r)} \leq 1.6 \qquad (31)$$

となる．

TABLE 14.4. THE CRITERION FOR THE STABILITY OF THE RADIATIVE GRADIENT

$1-\beta$	$[\kappa\eta(r)/\overline{\kappa\eta}(r)]_{\text{critical}}$	$1-\beta$	$[\kappa\eta(r)/\overline{\kappa\eta}(r)]_{\text{critical}}$
0	1.6	0.6	1.022
0.1	1.304	0.7	1.010
0.2	1.177	0.8	1.004
0.3	1.108	0.9	1.000
0.4	1.065	1.0	1.000
0.5	1.039		

さて，もし(31)の条件が破れたならば輻射傾斜は不安定になり，最初に何か擾乱が生ずると，それはますます助長され強まって衰えない．上昇流・下降流の系が起こって，それは存在する温度傾斜を（数値的に）小さくしようとする効果を持つことになる．そして最後には僅かな超断熱傾斜 Superadiabatic gradient の特徴を持つ定常状態が実現するだろう．定常条件の時でも，このような状態で緩やかな超断熱傾斜が残存するのは，もしそれが無くなれば，熱を輸送すべき流れのための原動力が無くなってしまうからである．この最後に残される超断熱傾斜の大きさは非可逆的に遊離されるエネルギーの量で決まり，そのエネルギーは対流で運ばれなければならない．しかし対流の場合には，熱は物質そのものの移動で運ばれるので，必要な超断熱過剰 Superadiabatic excess は内部熱エネルギーUに対する遊離熱エネルギーの比で決まるだろうし，それが極端に小さい量であることは明らかである．例えば$\rho = 1$，$T = 10^7$ K で $U{\sim}10^7$ erg・g^{-1} であり，他方$\varepsilon{\sim}100$ erg・g^{-1}である．従って断熱過剰は無視できほどごく小さい量になり，圧力・温度・密る度間の関係は，非常に良い精度で断熱方程式で与えられることになるだろう．対流平衡では圧力・密度との関係は，もし輻射圧p_rが無視できる時は、ボアッソン Poisson の法則(13)から

$$P = \mathrm{const.}\,\rho^{5/3} \tag{32}$$

で与えられるが，輻射圧が無視できない時の圧力・密度の関係を求めてみよう．
(1.31)式から

$$\mathrm{d}P/P = -\{(4-3\beta)/3(1-\beta)\}(d\beta/\beta) + (4/3)(\mathrm{d}\rho/\rho) \tag{33}$$

この式と(26)式とから$\mathrm{d}\rho/\rho$を消去すると

$$dP/P = -\{(32-24\beta-3\beta^2)/3\beta^2(1-\beta)\}\cdot d\beta \tag{34}$$

積分すれば

$$P = \mathrm{const.}\,e^{32/3\beta}(1-\beta)^{5/3}\beta^{-8/3} \tag{35}$$

この式を(1.31)式に代入すれば

$$\rho = \mathrm{const.}\{(1-\beta)/\beta\}e^{8/\beta} \tag{36}$$
$$T = \mathrm{const.}\, e^{8/3\beta}(1-\beta)^{2/3}\beta^{-2/3} \tag{37}$$

が得られる．(35)，(36)，(37)式は理想単原子気体（$\gamma = 5/3$）と輻射とを含む場合の断熱方程式の parametric 表現である．(35)，(36)，(37)式で$\beta = 1/(1+y)$と書くことにすれば

$$P = \mathrm{const.}\, e^{32y/3}y^{5/3}(1+y)$$
$$\rho = \mathrm{const.}\, e^{8/y}y \tag{38}$$
$$T = \mathrm{const.}\, e^{8y/3}y^{2/3}$$

と簡単な形で表わせる．