

## § 5. 理論的質量—光度—半径関係および主系列星に対する恒星モデル

これまで述べた物理的な基礎に基づいて、平衡方程式から恒星の質量・光度・半径・化学組成の間の一つの関係が導ける．先ず全圧力 $P$ の中で輻射圧 $p_r$ の占める割合が無視できるような $M \leq 3M_\odot$ の恒星（§1 を見よ）に限定しよう．平衡方程式を次の形で書く．

$$(1.3) : (k/\mu H) \cdot d(\rho T)/dr = -GM(r)\rho/r^2 \quad (1)$$

$$(1.4) : (dM(r))/dr = 4\pi r^2 \rho \quad (2)$$

$$(3.3) : dT/dr = (3\kappa\rho/16\pi acr^2T^3) \cdot L(r) \quad (3)$$

輻射温度傾斜を与える(3)式は§3で議論した意味において“安定な”場合にだけ成立つ．その議論によれば、輻射傾斜はそれが断熱傾斜に等しくなる時にちょうど安定でなくなる．全圧力 $P$ に対して輻射圧 $p_r$ が無視できる時（ $\beta = 1$ ），断熱的な $P$ と $\rho$ との関係は(3.24)により

$$dP/P = \{1 + (2/3)\} \cdot d\rho/\rho \quad (4)$$

で与えられるが、一般的に

$$dP/P = \{1 + (1/n_{\text{eff}})\} \cdot d\rho/\rho \quad (5)$$

と書くことにすれば、輻射傾斜の安定性に対する条件は次のように表現できる

輻射傾斜は、有効ポリトロップ指数 **effective polytropic index**  $n_{\text{eff}}$  が 1.5 より大きい（ $n_{\text{eff}} > 1.5$ ）限り安定である

ちょうど $n_{\text{eff}} = 1.5$ になる時に安定ではなくなり、この時から対流平衡が始まり、(3)式の代わりに圧力・密度の関係

$$(3.30) : P = \text{const} \cdot \rho^{5/3} \quad (6)$$

を用いなければならない。

さて(3)式は前以て $\kappa$ と $L(r)$ がわかっていなければならない。 $\kappa$ については§4で(4.7)式を用いるのにギロチン因子 $\tau$ を

$$\tau = \tau_0 \rho^\alpha \quad (7)$$

の冪の形で表わすと便利なことを示しておいた（太陽では $\alpha \sim 0.25$ ）。すると

$$\kappa = \kappa_0 \rho^{1-\alpha} T^{-3.5} \quad (8)$$

と書ける。ここで $\kappa_0$ は

$$\kappa_0 = (7.23 \times 10^{24} / \tau_0) [\sum_{Z>2} (x_Z Z^2 / A_Z)] (1 + X)(1 - X - Y) \quad (9)$$

を表わしており，恒星内部で組成がずっと一様であれば $\kappa_0$ は定数である。(8)式の形の $\kappa$ を用いると，輻射温度傾斜(3)式は

$$dT/dr = -\{3\kappa_0 L(r) / 16\pi a c\} \cdot (\rho^{2-\alpha} / r^2 T^{6.5}) \quad (10)$$

となる。さらに恒星の内部における $L(r)$ の知識が必要である。今，恒星の中心から距離 $r$ における条件で，物質1 gr当たり（非可逆的に）毎秒エネルギーを生成する割合を $\varepsilon(r)$ とすれば

$$dL(r)/dr = 4\pi r^2 \rho \varepsilon(r) \quad (11)$$

従って以下の理論では $\varepsilon(r)$ についての何らかの仮定に依存する。 $\varepsilon(r)$ に関しては，次の節で恒星のエネルギー源に戻るが，ここでの理論の進展には必ずしも $L(r)$ ， $\varepsilon(r)$ の正確な知識がなくてもよいことに注意するのが重要である。事実，多くの重要な結論は $L(r)$ の正確な知識がなくても得られるし，また歴史

的に見ても Eddington が質量—光度関係を得た当時はまだ原子核エネルギー源の知識は完全ではなかった。その理由は、エネルギー源の正確な分布が未知であるとしても、 $\varepsilon(r)$ が $r$ とともに徐々に減少する関数であることは明らかであり、現実の分布が2つの両極端

$$\varepsilon(r) = \bar{\varepsilon} = \text{const.} \quad (12)$$

$$\varepsilon(r) = 0 \quad (\text{for } r \neq 0) \quad (13)$$

の間にあると考えることができるからである。この両極端はエネルギー源についての、それぞれ一様モデル Uniform model, 点源モデル Point source model を表わしている。さて、これらの何れの場合についても（そして、更に一般的に  $\varepsilon \propto \rho^a T^b$ の形で表わされる場合に対しても）

$$\kappa_0 L = \text{const} \{M^{5.5+\alpha}/R^{0.5+3\alpha}\} \cdot \mu^{7.5} \quad (14)$$

の形の積分が得られることが証明できる。先ず点源モデルについて、この関係を求め、一様モデルについては後で考える。何れについても(14)の形となるが、式中の比例定数 const はモデルによって異なることに注意しなければならない。しかし、その違いはそれほど大きいものではなく、例えば  $\alpha = 0$  の場合、比例定数は一様モデルの方が点源モデルの 2.6 倍になるだけである。従って結果の関係の不確かさはそう大きくはなく、この不確かさを最小に留めるような進んだ考察ができる。

輻射傾斜の安定に対する条件(3.31)

$$\{\kappa\eta(r)/\overline{\kappa\eta(r)}\} < 1.6 \quad (15)$$

により、点源モデルでは内部のある決まった点で輻射傾斜が不安定になる。何故なら、この場合  $L(r) = L$  だから

$$r \rightarrow 0 \text{ で } \eta = \{L(r)/M(r)\}/\{L/M\} = M/M(r) \rightarrow \infty \quad (16)$$

となり、(15)の条件は必ず破れるからである。従って点源モデルは、必ず対流平衡にある中心核を持たねばならない。対流核の内部ではエネルギー源の精確な分布は(近似的な)断熱傾斜の維持には、それほど問題にならない。それによってただ小さい超断熱過剰の量が決まるだけである。従って、恒星の構造を一見何ら変更しないで対流核内のエネルギー源を、かなり広い任意的な方法で再分布することもできる。従って(13)の条件をもっと緩めて

$$\varepsilon(r) = 0 \quad (r > r_i \text{ に対して}) \quad (17)$$

と置き換えてもよいわけである。ここで $r_i$ は対流核の半径を示しており、点源モデルの特徴は不変のまま保たれている。後に判るように不透明度の法則(8)で作られた点源モデルは恒星の全質量の9~15%を含む対流核を持つことになる。従って点源モデルの関係式が成立するためには、エネルギー源が中心部の質量10~15%の領域に限定されているということだけが要求されるのである。

現在、原子核反応が恒星の主要なエネルギー源であることが判っている。何故そう考えられるかという根拠については後に述べるが、ここでそれを持ち出した理由は、それらの原子核反応が温度に非常に敏感で、恒星の質量の10%を占める中心部が実際にエネルギーの殆ど全部を生成していると考えられるからである。こう考えてくると、点源モデルこそは他の如何なるモデルよりも恒星の構造の考察に最適な出発点となることが判る。

最後に、化学組成について恒星の内部全体にわたって一様性か、あるいは幾つかの仮定をしなければならない。これについては後に述べるが、差当って恒星の内部を通じて $X$ ,  $Y$ ,  $\mu$ が一定であると仮定しておこう。

$L(r) = L$ の場合の(10), (1), (2)は Schwarzschild の行なったように、無元変数 non-dimensional variables を使って変換すれば

$$\begin{aligned} P &= (p/4\pi) \cdot (GM^2/R^4), \quad T = t(\mu H/k) \cdot (GM/R), \\ M(r) &= qM, \quad r = xR \end{aligned} \quad (18)$$

を用いて、それぞれの式は

$$dp/dx = -pq/tx^2, \quad dq/dx = px^2/t \quad (19)$$

および

$$dt/dx = -C \cdot \{p^{2-\alpha}/x^2 t^{8.5-\alpha}\} \quad (\text{輻射平衡の場合}) \quad (20)$$

となる。ここで $C$ は

$$\begin{aligned} C &= C(\alpha) \\ &= \{3\kappa_0/4(4\pi)^{3-\alpha}ac\}(k/GH)^{7.5}\{LR^{0.5-3\alpha}/M^{5.5+\alpha}\mu^{7.5}\} \end{aligned} \quad (21)$$

であるが、 $L$ ,  $M$ ,  $R$ を太陽単位で表わして対数をとれば

$$\log C = -30.725 + 0.3276\alpha + \log \kappa_0 + \log(LR^{0.5-3\alpha}/M^{5.5+\alpha}\mu^{7.5}) \quad (22)$$

となる。

(19), (20)の解が満たすべき境界条件は、恒星の境界即ち $r = R$ ,  $M(r) = M$ において圧力も温度も0になる、 $P = T = 0$ という事実に応じて

$$p = t = 0, \quad q = 1 \quad (\text{at } x = 1) \quad (23)$$

である。

さて任意の $C$ の値に対して、恒星の表面 $x = 1$ における境界条件(23)を満たすような(19), (20)の解はただ一つだけ存在する。しかし、その解は一般には恒星の中心 $x = 0$ における条件を満たしてはおらず、これを満たすものを選び出せば $C$ が決定できる。このことは重要な結果であって、以下の議論の多くはそれに関連がある。

任意に与えられた $C$ に対して、境界条件(23)を満たすような(19), (20)の解、

即ち恒星の境界近く ( $x \rightarrow 1$ ) における圧力と温度の様子を調べてみよう.

$x = 1$  近くの解を考える時, (19)式の  $dp/dx$  の式中で  $q \equiv 1$  で置き換えてもそれ程大きい誤差は生じない. 何故ならすぐ判るように恒星の表面近くの密度は非常に緩やかにしか増加しないので, この領域における平衡式の積分で  $M(r)$  と  $M$  との差は無視できるからである. 従って  $x = 1$  近くでは  $q = 1$  と置き

$$dp/dx = -p/tx^2, \quad dt/dx = -C \cdot \{p^{2-\alpha}/x^2 t^{8.5-\alpha}\} \quad (\text{for } x = 1) \quad (24)$$

両式で割算をして

$$dp/dt = t^{7.5-\alpha}/Cp^{1-\alpha} \quad (25)$$

これは容易に積分できて,  $p$  と  $t$  が同時に0となるという境界条件(23)によって積分定数も決定すれば, 積分の結果は

$$p^{2-\alpha} = \{(2-\alpha)/C(8.5-\alpha)\}t^{8.5-\alpha} \quad (26)$$

これを(24)の  $dt/dx$  に代入すれば

$$dt/dx = -\{(2-\alpha)/(8.5-\alpha)\} \cdot (1/x^2) \quad (27)$$

われわれの条件 ( $x = 1$  で  $t = 0$ ) を満たすこの式の解は

$$t = \{(2-\alpha)/(8.5-\alpha)\} \cdot \{1 - (1/x)\} \quad (28)$$

これに対応する密度の解は (輻射圧を無視して),  $\rho = \mu HP/kT$  に変数変換 (18)を用い

$$\rho = \{M/4\pi R^3\} \cdot (p/t) \quad (29)$$

で与えられ, (26), (28), (29)で解が得られた. 輻射平衡の部分のポリトロープ指数を求めるには, (26), (29)から

$$\begin{aligned} dp/p &= \{(8.5 - \alpha)/(2 - \alpha)\} \cdot (dt/t) \quad (= dP/P) \\ d\rho/\rho &= (dp/p) - (dt/t) \end{aligned}$$

であるから両式で $dt/t$ を消去すれば(5)式の形となり, ポリトロープ指数は

$$n_{\text{eff}} = \{(8.5 - \alpha)/(2 - \alpha)\} - 1 = 6.5/(2 - \alpha) \quad (x \rightarrow 1) \quad (30)$$

の値で始まることになる. われわれが問題にしようとしている $\alpha$ の範囲(太陽に対して $\alpha \sim 0.25$ )に対して, これは1.5より大きく, 恒星の外層部では輻射平衡が安定である.

解(26), (28), (29)は勿論, 境界 $x = 1$ の近くでだけ成立するのであるが, 標準法 Standard method によって内方へと接続して行ける. そして解に沿って内方に進んで行くと, 有効ポリトロープ指数 $n_{\text{eff}}$ は次第に減少し, ある一定の点, 例えば $x = x_i$ で $n_{\text{eff}} = 1.5$ となる. これが起これると輻射平衡は破れて対流平衡が始まり, 輻射平衡式(20)は使えず, この代わりに(6)から得られる

$$p/p_i = (t/t_i)^{2.5} \quad (31)$$

を(19)式と組み合わせて基本式としなければならない. ここで $p_i, t_i$ は $n_{\text{eff}} = 1.5$ となる点 $x = x_i$ における $p, t$ の値である. 従って $x_i$ より内部の平衡方程式は

$$(d/dx)t^{2.5} = -(q/x^2)t^{1.5}, \quad dq/dx = (p_i/t_i^{2.5})t^{1.5}x^2 \quad (32)$$

あるいは

$$2.5(dt/dx) = -(q/x^2), \quad (1/x^2)(dq/dx) = (p_i/t_i^{2.5})t^{1.5} \quad (33)$$

となる. これらを用いて, 解は $x < x_i$ に対して継続される. そして明らかに

恒星の中心  $x \rightarrow 0$  に近付く時、質量  $q \rightarrow 0$  になることが必要である。一般に、即ち任意に定めた  $C$  の初期値で出発すれば、この要件が満たせない。そして、この要求が満たされねばならないという恒星の中心における境界条件によって  $C$  が決まってくる。以上のようにして、何故ある決まった  $C$  の値に対してのみ、 $x = 1$  および  $x = 0$  の両方における境界条件を満たすような解がただ一つだけ存在するかということが判る。

この解を用いることによって、質量  $M$ 、半径  $R$  の与えられた恒星に対して内部の任意の点における圧力・密度・温度が(18)式で得られる。しかし、ここでの議論の最も重要な結果は、質量・光度・半径の関係が得られたことである。というのは  $C$  が決定できる定数であるから(21)式は

$$L = \{4(4\pi)^{3-\alpha} ac / 3\kappa_0 C\} (GH/k)^{7.5} (M^{5.5+\alpha} / R^{0.5+\alpha}) \mu^{7.5} \quad (34)$$

と書けるからである。

$\alpha = 0$  : Cowling によって最初に考察された Cowling model

$\alpha = 0.25$  : Schwarzschild によって積分されたもので太陽に対応

$\alpha = 0.375, 0.500, 0.550, 0.600, 0.625$  : Williamson & Duff によって研究された。これらの積分結果は表 7, 表 8 に示されており、図 5, 図 6 に描かれている。2 つの代表的な恒星、太陽とシリウス A (Sirius A) に対してこれらのモデルから予想される中心密度  $\rho_c$ 、中心温度  $T_c$  などが表 9 に示されている。

$\kappa_0$  および  $\mu$  は何れも水素、ヘリウムの相対量  $X, Y$  で表わせるので [ $\kappa_0$  (§ 5.9),  $\mu$  (§ 2.15) 参照] 上の(34)式は恒星の質量  $M$ 、光度  $L$ 、半径  $R$  および水素・ヘリウムの相対量  $X, Y$  の間の関係式であることになる。従って  $L, M, R$  の知られている恒星に対して(34)式は水素とヘリウムの相対量  $X, Y$  の間の関係式を与える。この問題については後に考える。

さて議論を完全にするために、エネルギー源の一樣モデルに対して(14)式を求めてみよう。もし適度の質量の恒星に限定すれば  $dP/dr$  の式中で輻射圧  $p_r$  の項が無視でき、この場合、不透明度の法則やエネルギー生成の法則が著しく変わっても、質量、光度、半径の関係は、形が殆ど変わらないことを述べてお



いた。正確に言えば静流体力学平衡式の中の $p_r$ 項が無視できれば、 $\kappa \propto \rho^c T^d$ で変わる不透明度法則に対して点源モデルでも一様源モデルでも、同じ形の質量、光度、半径の関係がえられることが証明できる。何故こうなるかは興味深いことである。この目的のために、不透明度法則が(8)式の形をしている場合を考える。

エネルギー源が恒星内部で一様に分布している時

$$L(r) = (L/M)M(r) \quad (35)$$

であり、変数変換(18)を行なえば平衡方程式は(19), (20)に対応して

$$\begin{aligned} (dp/dx) &= -(pq/tx^2) ; & (dq/dx) &= px^2/t \\ (dt/dx) &= -C(p^{2-\alpha}/x^2 t^{8.5-\alpha})q \end{aligned} \quad (36)$$

ここで定数 $C$ は(21)式と同じ意味を持っている。 $dp/dx$ の式と $dt/dx$ の式で割算をすれば

$$(dp/dt) = (t^{7.5-\alpha}/Cp^{1-\alpha}) \quad (37)$$

を得るが、この式を見ると点源モデルの場合に、境界近く ( $x \rightarrow 1$ ) で成立する式として得られた(25)式と同じである。従って(26)と同じ関係

$$p^{2-\alpha} = \{(2-\alpha)/C(8.5-\alpha)\}t^{8.5-\alpha} \quad (38)$$

が今度の問題では ( $x \rightarrow 1$ ) に限定されることなく正しい積分となる。 $p$ と $t$ がこのように関係していると、平衡方程式(36)は

$$(dt/dx) = -C\{(2-\alpha)/(8.5-\alpha)\}(q/x^2) \quad (39)$$

および

$$(dq/dx) = \{(2-\alpha)/C(8.5-\alpha)\}^{1/(2-\alpha)} \cdot t^{6.5/(2-\alpha)}x^2 \quad (40)$$

となる。この2つの式から $q$ を消去すれば2階の微分方程式

$$\begin{aligned} & (1/x^2)(d/dx)\{x^2 \cdot (dt/dx)\} \\ & = -\{(2-\alpha)/(8.5-\alpha)\} \times \{(2-\alpha)/C(8.5-\alpha)\}^{1/(2-\alpha)} t^{6.5/(2-\alpha)} \end{aligned} \quad (41)$$

となり、これはいわゆる Lane-Emden の微分方程式である。これを解くのに満たすべき境界条件は

$$t = 0; \quad dt/dx = -(2-\alpha)/(8.5-\alpha) \quad (\text{at } x = 1) \quad (42)$$

この2階の微分方程式(41)は、任意の $C$ に対して境界条件(42)を満たす唯一の解を持つ。他方、Lane-Emden 方程式の理論から判ることは、 $x = 1$ において傾斜 $dt/dx$ の種々の初期値で出発した(41)式の全ての解の中で、 $x = 0$ で有限で残り得る解はただ一つしかない。他の解は全て原点 $x = 0$ が特異点になる。境界条件(42)を満たし、(41)の解が $x = 0$ で特異性を持たないためには、 $C$ は決まった値でなければならない。こうして一様源モデルの場合にも $C$ はやはり決定される定数である。このようにして決められた定数 $C$ の値は点源モデルの条件で決められる値とは異なるが、それが決定される定数である限り、質量 - 光度 - 半径の関係式は(34)式と同じ形をとる。

### 水素対流層 Hydrogen convection zone : (Solar System Astrophysics)

光球の下にある対流領域で起こっている物理過程については、まだ満足な理論はないが、この領域を幾分でも理解することは、それが引き起こしている多くの観測可能な現象のために重要である。対流領域では温度傾斜は

$$[\pi F]_{total} = [\pi F]_{conv} = [\pi F]_{rad} \quad (1)$$

の式から計算しなければならない。このため対流フラックスの式が必要である。

Schwarzschild の安定性・判別式を次の形で書こう.

$$\{d \log T / d \log P\}_{rad} > \{d \log T / d \log P\}_{ad} \quad (2)$$

太陽の光球下の領域でこの不等式を議論するため、断熱傾斜を計算するのに水素の電離を考慮する必要がある。断熱条件は熱力学第 1 法則から導ける。 $E/\rho$  を単位質量当たりのエネルギー、 $1/\rho$  を単位質量当たりの体積とする。すると熱力学第 1 法則は

$$d(E/\rho) + Pd(1/\rho) = dQ = 0 \quad (3)$$

であり、この式は

$$(dE/P) = (d\rho/\rho)\{1 + (E/P)\} \quad (4)$$

ここで先ず運動エネルギーだけを持つ理想気体を考えよう。状態方程式は

$$P = \rho kT / m_H \mu \quad (5)$$

又

$$E = (3/2)(\rho kT / m_H \mu) = (3/2)P \quad (6)$$

これらの式の対数微分をとれば

$$(dP/P) = (d\rho/\rho) + (dT/T) \quad (7)$$

$$dE = (3/2)dP \quad (8)$$

(4), (6), (7), (8)式から通常の関係

$$(dP/P) = (5/2)(dT/T) \quad (9)$$

が得られる.

一般にエネルギーは運動, 電離, 励起のエネルギーから成っている. この場合  $\rho = \rho(T, P)$ ,  $E = E(T, P)$  あるいは

$$(dE/P) = c_1(dT/T) + c_2(dP/P) \quad (10)$$

$$(d\rho/\rho) = -c_3(dT/T) + c_4(dP/P) \quad (11)$$

これらの式は(8), (7)式の一般化した類推 analog である. これらと断熱条件の(4)式とから

$$\begin{aligned} & [(dT/T)/(dP/P)]_{ad} \\ & = [-c_2 + \{1 + (E/P)\}c_4]/[c_1 + \{1 + (E/P)\}c_3] \end{aligned} \quad (12)$$

もし水素の電離の影響を考えると, 理想気体の法則(5)は

$$P = (k/m_H\mu)(1+x)\rho T \quad (13)$$

ここで $x$ は電離度であり, また $\mu$ は $x=0$ に対する時と同じ値をとる. するとエネルギー (励起エネルギーを無視して) は

$$E = (3/2)P + (x\rho/m_H\mu)I \quad (14)$$

ここで $I$ は電離エネルギーである. これらの関係と Saha の公式とで, (12)式はこの場合

$$\begin{aligned} & [d \log T / d \log P]_{ad} \\ & = [1 + (1/2)x(1-x)\{(5/2) + (I/kT)\}] \\ & \div [(5/2) + (1/2)x(1-x)\{(5/2) + (I/kT)\}^2] \end{aligned} \quad (15)$$

電離度は $x(1-x)$ の積でだけ現われているので, 傾斜はゼロ電離 ( $x=0$ ) あ

るいは全電離 ( $x = 1$ ) に対して同じであることに気付く。

TABLE 14.7. THE CONSTANTS FOR THE POINT-SOURCE MODELS

$a$	0.0	0.250	0.375	0.500	0.550	0.600	0.625
$C(a)$ .....	.....	$3.04 \times 10^{-4}$	$6.47 \times 10^{-4}$	$1.80 \times 10^{-3}$	$3.09 \times 10^{-3}$	$5.90 \times 10^{-3}$	$8.59 \times 10^{-3}$
Fraction of mass in core.....	0.145	0.1183	0.1057	0.09395	0.0892	0.0847	0.0826
Fraction of the radius occupied by core.....	0.169	0.1217	0.0967	0.07104	0.0603	0.0496	0.0443
$\rho_c/\bar{\rho}$ .....	37.0	79.1	139.2	309.7	477.9	813.4	1112.
$Q\ddagger$ .....	20.8	25.9	30.6	39.0	44.6	52.6	58.1

† This is the factor in the formula,  $T_c = Q\ddagger \frac{M}{R} \times 10^6$  °K, for the central temperature when  $M$  and  $R$  are expressed in solar units.

E 14.9. THE INTERNAL DENSITIES AND TEMPERATURES IN THE SUN AND  
*Sirius A*

	Sun	<i>Sirius A</i>
$X$ .....	0.593†	0.68†
$Y$ .....	0.362†	0.28†
$\mu$ .....	0.676†	0.629†
$T_c$ .....	$17.5 \times 10^6$ °K	$21.4 \times 10^6$ °K
$\rho_c$ .....	112 gm/cm <sup>3</sup>	46 gm/cm <sup>3</sup>
$T$ } at interface between convec-	$14.2 \times 10^6$ °K	$17.3 \times 10^6$ °K
$\rho$ } tive core and radiative	81 gm/cm <sup>3</sup>	34 gm/cm <sup>3</sup>
envelope		

These values are derived in the next section.

TABLE 14.8. THE DENSITY AND TEMPERATURE DISTRIBUTIONS IN POINT-SOURCE MODELS

$\alpha = 0.0$			$\alpha = 0.375$		
$x$	$\rho/\rho_c$	$T/T_c$	$x$	$\rho/\rho_c$	$T/T_c$
0.0	1.000	1.000	0.0	1.000	1.000
0.0569	0.961	0.974	0.0250	0.980	0.987
0.1138	0.852	0.898	0.0500	0.923	0.948
0.1691	0.699	0.788	0.0750	0.836	0.888
0.1708	0.693	0.784	0.0967	0.743	0.820
0.2277	0.508	0.661	0.1198	0.625	0.745
0.2846	0.330	0.551	0.1521	0.450	0.649
0.3415	0.197	0.455	0.1912	0.272	0.546
0.3985	0.110	0.372	0.2376	0.137	0.445
0.4554	$5.90 \times 10^{-2}$	0.303	0.2912	$5.91 \times 10^{-2}$	0.352
0.5123	$3.05 \times 10^{-2}$	0.245	0.3513	$2.26 \times 10^{-2}$	0.273
0.5692	$1.51 \times 10^{-2}$	0.196	0.4166	$8.07 \times 10^{-3}$	0.209
0.6262	$7.16 \times 10^{-3}$	0.156	0.5309	$1.34 \times 10^{-2}$	0.133
0.6831	$3.20 \times 10^{-3}$	0.121	0.6419	$2.14 \times 10^{-4}$	0.0841
0.7400	$1.30 \times 10^{-3}$	0.0919	0.7398	$3.40 \times 10^{-5}$	0.0531
0.7969	$4.60 \times 10^{-4}$	0.0666	0.8183	$5.40 \times 10^{-4}$	0.0335
0.8538	$1.26 \times 10^{-4}$	0.0448	1.0000	0.0	0.0
0.9108	$2.06 \times 10^{-5}$	0.0256			
0.9677	$6.22 \times 10^{-7}$	0.00873			
0.9962	$5.4 \times 10^{-10}$	0.00100			
1.0000	0.0	0.0			

$\alpha = 0.25$			$\alpha = 0.500$		
$x$	$\rho/\rho_c$	$T/T_c$	$x$	$\rho/\rho_c$	$T/T_c$
0.0	1.000	1.000	0.0	1.000	1.000
0.0500	0.948	0.965	0.0250	0.966	0.977
0.0750	0.887	0.923	0.0500	0.871	0.912
0.1000	0.808	0.867	0.0710	0.755	0.830
0.1217	0.728	0.809	0.0886	0.638	0.755
0.1368	0.666	0.767	0.1118	0.470	0.667
0.1509	0.604	0.729	0.1403	0.294	0.572
0.1829	0.463	0.648	0.1745	0.154	0.474
0.2199	0.318	0.563	0.2150	$6.84 \times 10^{-2}$	0.384
0.2619	0.194	0.478	0.2619	$2.68 \times 10^{-2}$	0.305
0.3087	0.106	0.397	0.3150	$9.62 \times 10^{-3}$	0.239
0.3600	$5.34 \times 10^{-2}$	0.325	0.3734	$3.29 \times 10^{-3}$	0.185
0.4146	$2.51 \times 10^{-2}$	0.262	0.4785	$5.22 \times 10^{-4}$	0.121
0.4713	$1.13 \times 10^{-2}$	0.210	0.5856	$8.11 \times 10^{-5}$	0.0785
0.5288	$4.94 \times 10^{-3}$	0.168	0.6852	$1.25 \times 10^{-5}$	0.0510
0.5855	$2.13 \times 10^{-3}$	0.134	0.7702	$1.92 \times 10^{-4}$	0.0332
0.6402	$9.12 \times 10^{-4}$	0.106	1.0000	0.0	0.0
0.6911	$3.89 \times 10^{-4}$	0.0845			
0.7800	$7.05 \times 10^{-5}$	0.0534			
0.8993	$2.30 \times 10^{-4}$	0.0212			
1.0000	0.0	0.0			

TABLE 14.8. THE DENSITY AND TEMPERATURE DISTRIBUTIONS IN POINT-SOURCE MODELS.—(Continued)

$\alpha = 0.550$			$\alpha = 0.625$		
$x$	$\rho/\rho_c$	$T/T_c$	$x$	$\rho/\rho_c$	$T/T_c$
0.0	1.000	1.000	0.0	1.000	1.000
0.0200	0.970	0.980	0.0150	0.970	0.980
0.0400	0.887	0.923	0.0300	0.887	0.923
0.0603	0.761	0.834	0.0443	0.767	0.838
0.0675	0.706	0.798	0.0625	0.572	0.726
0.0852	0.560	0.716	0.0782	0.401	0.640
0.1071	0.385	0.625	0.0975	0.239	0.551
0.1336	0.223	0.532	0.1209	0.120	0.461
0.1656	0.108	0.440	0.1490	$5.15 \times 10^{-2}$	0.378
0.2034	$4.55 \times 10^{-2}$	0.355	0.1822	$1.97 \times 10^{-2}$	0.304
0.2472	$1.71 \times 10^{-2}$	0.282	0.2209	$6.97 \times 10^{-3}$	0.242
0.2970	$5.98 \times 10^{-3}$	0.221	0.2652	$2.35 \times 10^{-3}$	0.191
0.3522	$2.01 \times 10^{-3}$	0.173	0.3148	$7.71 \times 10^{-4}$	0.151
0.4528	$3.14 \times 10^{-4}$	0.114	0.4071	$1.17 \times 10^{-4}$	0.101
0.5810	$4.81 \times 10^{-5}$	0.0750	0.5065	$1.76 \times 10^{-5}$	0.0678
0.6571	$7.33 \times 10^{-6}$	0.0493	0.6055	$2.64 \times 10^{-6}$	0.0453
0.7447	$1.11 \times 10^{-6}$	0.0324	0.6965	$3.94 \times 10^{-7}$	0.0303
1.0000	0.0	0.0	1.0000	0.0	0.0

$\alpha = 0.600$		
$x$	$\rho/\rho_c$	$T/T_c$
0.0	1.000	1.000
0.0150	0.976	0.984
0.0300	0.907	0.937
0.0496	0.766	0.837
0.0644	0.627	0.752
0.0809	0.460	0.668
0.1010	0.289	0.578
0.1255	0.153	0.486
0.1550	$6.85 \times 10^{-2}$	0.400
0.1898	$2.70 \times 10^{-2}$	0.322
0.2304	$9.75 \times 10^{-3}$	0.256
0.2766	$3.33 \times 10^{-3}$	0.202
0.3281	$1.10 \times 10^{-3}$	0.159
0.4234	$1.69 \times 10^{-4}$	0.106
0.5248	$2.55 \times 10^{-5}$	0.0705
0.6242	$3.85 \times 10^{-6}$	0.0469
0.7142	$5.78 \times 10^{-7}$	0.0312
1.0000	0.0	0.0

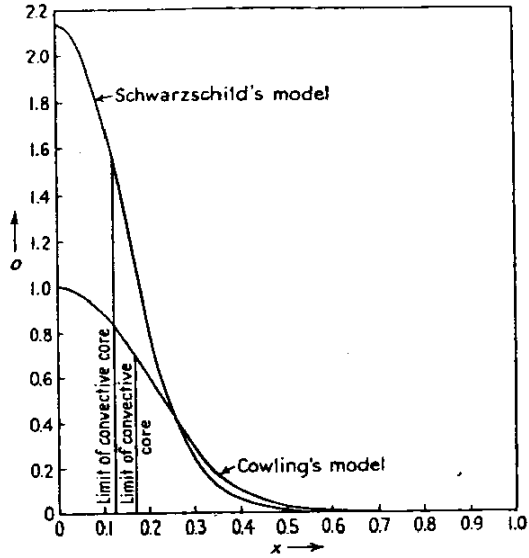


Fig. 14.5. The relative distributions of density in the Cowling and in the Schwarzschild models. The limit of the convective core in each case is indicated.

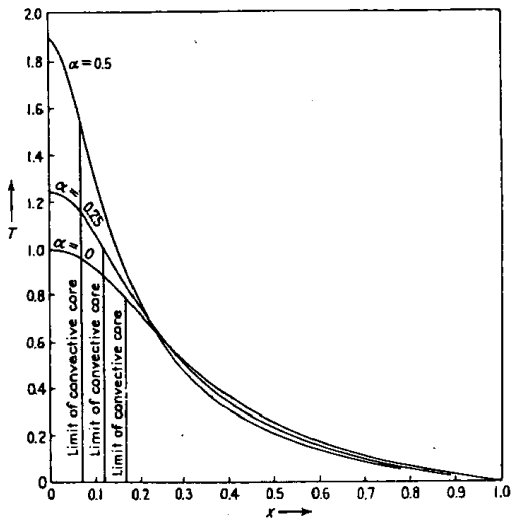


Fig. 14.6. The relative distributions of temperature in the point-source models on the law of opacity  $x \propto \rho^{1-\alpha} T^{3.5}$ . The cases  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 0.25$ , and  $\alpha = 0.5$  are illustrated. The limit of the convective core in each case is indicated.