§7．炭素一窒素循環反応

実験室の実験で原子核反応は，例えば，陽子との衝突で起こり，変換が起こるためには陽子は必ずしも核を取り巻くポテンシャル障壁以上のエネルギーを持たなくてもよいことが判る．この理由は，量子論によれば，核と衝突する陽子は仮にそれがポテンシャル障壁を越えるほど十分なエネルギーを持っていなくても核の中に潜りこむ tunneling 有限な確率を持っていることになる．特に荷電Z_1e，Z_2e，質量M_1，M_1の 2 つの核が相対運動のエネルギーEで衝突したならば，量子論によって，核が互いに貫入し《複合核》を作る確率は

$$W = \exp[-2\{2M_1M_2/(M_1+M_2)\}^{1/2}(\pi^2 Z_1 Z_2 e^2/hE^{1/2})] \tag{1}$$

で与えられる．そこで

$$E = kTy \tag{2}$$

と書き，数値を代入すると

$$W = \exp[-1.068\times10^5\{A_1A_2/(A_1+A_2)\}^{1/2}(Z_1Z_2/T^{1/2}y^{1/2})] \tag{3}$$

ここでA_1，A_2は$\mathrm{H}=1$とした時の核の原子量である．

(3)式によれば貫入の確率は10^7K 程度の温度でさえ極めて小さく，指数にはZ_1Z_2因子が含まれているので，衝突の一方が陽子でない核反応は一般に考える必要のないことは明らかである．

上記のように(1)式は《1 衝突当たり》複合核を作る確率を与える．しかし，衝突とは何だろうか？　これを定義するためには衝突断面積を決定しなければならない．そして，それはもし 2 つの衝突核が衝突期間中にこの面積内を互いに通過する時，それらが複合核を作る確率がWで与えられるようなものでなければならない．今考えているような形式の衝突に対する断面積は，衝突粒子の質量中心が静止しているような座標系における，それら粒子の De Broglie 波長で決定される．即ち

$$\pi\sigma^2 \sim \pi(h/2\pi)^2\{(M_1+M_2)/M_1M_2\}(1/2E) \tag{4}$$

熱的平衡条件のもとでは相対運動の運動エネルギーが（E，$E+\mathrm{d}E$）の範囲にある衝突の数は単位容積当たり

$$\sigma^2\{2N_1N_2/(kT)^{3/2}\}\{2\pi(M_1+M_2)/M_1M_2\}^{1/2}e^{-E/kT}E\mathrm{d}E \tag{5}$$

で与えられる．ここでN_1，N_2は 2 種の核の単位容積当たりの数である．

(3)，(4)，(5)を組合せ，yの範囲について積分すれば，単位時間内に貫入に成功する数として

$$\begin{aligned}&\{N_1N_2/(kT)^{1/2}\}(h^2/2\pi)^3\{2\pi(M_1+M_2)/M_1M_2\}^{3/2}\\ &\quad\times\int_0^\infty \exp\{-y-2Q^3y^{-1/2}\}dy\end{aligned} \tag{6}$$

を得る．ここで｛(3)式を見よ｝

$$Q^3 = 5.340\times10^4\,\{A_1A_2/(\{A_1{+}A_2)\}^{1/2}\,(Z_1Z_2/T^{1/2}) \tag{7}$$

(6)式の integrand は 2 つの因子から成っていることが判る．1 つは$y\to\infty$とともに指数的に減少し（トンネル効果），他は 0 から 1 まで単調に増加する（衝突確率）．そしてQ^3は一般に大きい数だから，最大値はyの大きい値に対して起こるに違いない．実際，最大値は

$$y^* = Q^2 = (1.418\times10^3/T^{1/3})\{A_1A_2/(\{A_1{+}A_2)\}^{1/3}(Z_1Z_2)^{2/3} \tag{8}$$

で起こる．この y^*の値に対応するエネルギーは

$$E^* = kTQ^2 = 0.1222\{A_1A_2/(\{A_1{+}A_2)\}^{1/3}(Z_1Z_2)^{2/3}T^{2/3}\ \text{eV} \tag{9}$$

である．この式に従って，陽子（$A_1 = 1$，$Z_1 = 1$）と炭素核（$A_1 = 6$，$Z_1 = 12$）との間の$T = 2 \times 10^7\mathrm{K}$ における衝突について，成功する貫入は 27 keV 程度のエネルギーで最も頻繁に起こる．この値は実験室で核反応が観測されている最低エネルギーの約 1/10にしかならない．そのように小さいエネルギーを扱うことを認めることが大切である．

さて(6)式の積分を近似的に求めてみよう．(8)式で述べたようにこの積分の integrand は$y = Q^2$で鋭い最大値を持つ．従って integrand の指数を$y = Q^2$の付近で Taylor 級数に展開すると

$$y + 2Q^3 y^{-1/2} = 3Q^2 + \{(3/4)(y - Q^2)^2/Q^2\} + \mathrm{O}(y - Q^2)^3 \qquad (10)$$

従って積分の値は，Qが大きい数であることを考えて［(8)式参照］，積分の中で(10)式を用いて得られる．積分は

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \exp(-y - 2Q^3 y^{-1/2})\mathrm{d}y \\ &\sim \exp(-3Q^2)\int\{-3Q^2 \to \infty\}\exp\{-3(y - Q^2)^2/4Q^2\}\mathrm{d}(y - Q^2) \\ &= 2(\pi/3)^{1/2} \cdot Q \cdot \exp(-3Q^2) \end{aligned} \qquad (11)$$

従って(6)の近似的な値は

$$\begin{aligned} &\{h^2/(2\pi)^3\}\{N_1 N_2/(kT)^{1/2}\} \\ &\quad \times \{2\pi(M_1 + M_2)/M_1 M_2\}^{3/2} \cdot 2(\pi/3)^{1/2} Q \exp(-3Q^2) \end{aligned} \qquad (12)$$

この式は温度Tの集合で 2 種の核間で起こる成功的な貫入数を与える．これは起こる核反応の数を表わしてはいない．この量を求めるには成功的な貫入に続いて，何時でも成功的な反応が起こるのではないという事実を表わす因子，即ち成功的な貫入に対して成功的な反応が起こる確率を(12)式に掛けねばならない．この因子に関する状況は次のようである．

もし続いて起こるのが 2 つ以上の粒子への《複合核の分裂》disintegration である場合には，貫入に続いて常に分裂が起こる．このような反応の例は

$_3\mathrm{Li}^7 + {}_1\mathrm{H}^1 \rightarrow 2\ {}_2\mathrm{He}^4$
$_5\mathrm{B}^{11} + {}_1\mathrm{H}^1 \rightarrow 3\ {}_2\mathrm{He}^4$

他方，もし複合核が分裂するほど十分なエネルギーを持たない時には，陽子は一般に再放出される．しかし，稀には複合核はγ線を放出し，輻射的に陽子を捕獲する．このような輻射捕獲 Radiative capture の例は

$_6\mathrm{C}^{12} + {}_1\mathrm{H}^1 \rightarrow {}_7\mathrm{N}^{13} + \gamma$
$_6\mathrm{C}^{13} + {}_1\mathrm{H}^1 \rightarrow {}_7\mathrm{N}^{14} + \gamma$

などによるものである．輻射捕獲が稀にしか起こらないのは，複合核の輻射遷移に対する平均寿命が複合核自身の平均寿命に比べて著しく長いからであり，実際その比は10^6程度である．この顕著な例は次の 1 組の反応である．

$_7\mathrm{N}^{14} + {}_1\mathrm{H}^1 \rightarrow {}_8\mathrm{O}^{15} + \gamma$	1
$_7\mathrm{N}^{15} + {}_1\mathrm{H}^1 \rightarrow {}_6\mathrm{C}^{12} + {}_2\mathrm{He}^4$	$10^3 \sim 10^4$

100 keV 程度の陽子エネルギーに対して後者は前者に比べて約$10^3 \sim 10^4$倍も起こり易いことが観測されている．

(12)式に戻り，この式に 1 貫入当たりの反応の確率を表わす因子を掛けなければならない．この因子は一般に

$$\Gamma\{M_1 M_2/(M_1 + M_2)\}(R^2/\hbar) \qquad (\hbar = h/2\pi) \qquad (13)$$

の形で書ける．ここでΓは反応に対する複合核の平均寿命の逆数であり，Rは複合核の半径である．(13)式の第 2 の因子は，実質的には，複合核の振動の基本周期であることが判るだろう．(12)，(13)式により，1 gr 当たり毎秒 2 種の核間で起こる核反応数は

Table 14.10. Mean Life of Nuclei for Typical Conditions in the Interior of Stars

Reaction	Mean life		Reference to notes
	$T = 20 \times 10^6$ °K, $\rho X = 30$ gm/cm^3	$T = 16 \times 10^6$ °K, $\rho X = 120$ gm/cm^3	
$H + H = D^2 + \beta$	4.8×10^{10} years	2.4×10^{10} years	
$D^2 + H = He^3$	2 sec	3 sec	1
$T^3 + H = He^4$	0.2 sec	0.3 sec	2
$He^3 + He^4 = Be^7$	10^8 years	10^9 years	3
$He^3 + He^3 = He^4 + H + H$	2×10^5 years	2×10^6 years	4
$Li^6 + H = He^4 + He^3$	5 sec	12 sec	5
$Li^7 + H = 2He^4$	1 min	3 min	5
$Be^9 + H = Li^6 + He^4$	15 min	65 min	5
$B^{10} + H = C^{11}$	1000 years	7000 years	5
$B^{11} + H = 3He^4$	3 days	21 days	5
$C^{12} + H = N^{13}$	1.2×10^5 years	1.3×10^6 years	6
$C^{13} + H = N^{14}$	$\leq 2.8 \times 10^4$ years	$\leq 2.5 \times 10^5$ years	6
$N^{14} + H = O^{15}$	2.2×10^6 years	4.1×10^7 years	6
$N^{15} + H = He^4 + C^{12}$	520 years	9.5×10^3 years	6
$O^{16} + H = F^{17}$	10^{12} years	3×10^{13} years	5
$F^{19} + H = O^{16} + He^4$	3×10^7 years	10^9 years	5
$Ne^{22} + H = Na^{23}$	2×10^{13} years	10^{15} years	5

[1] Cross section as determined by Fowler.

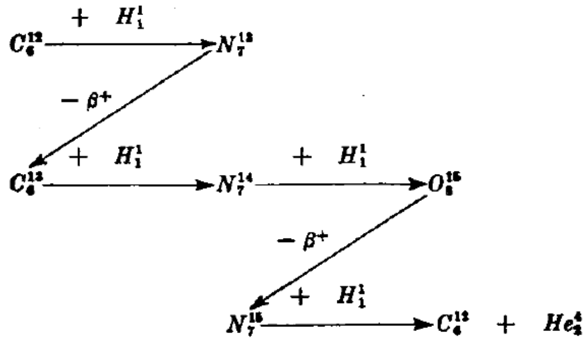
[2] With Bethe's estimated cross section, *Phys. Rev.*, **55**, 434 (1939).

[3] Assuming $Y = 0.25X$ and using Bethe's cross section, *Phys. Rev.*, **55**, 434 (1939).

[4] On the assumption that $n(He^3) = 10^{-3}n(H)$; this ratio will prevail under conditions of secular equilibrium at $T = 16 \times 10^6$ °K and $\rho X = 120$.

[5] H. A. Bethe, *Phys. Rev.*, **55**, 434 (1939).

[6] Cross sections from W. A. Fowler, *Phys. Rev.*, **81**, 655 (1951); see also I. Epstein, *Ap. J.*, **112**, 207 (1950).



$$P = \{h^3/(2\pi)^{3/2}\}(\rho x_1 x_2/M_1 M_2)\{(M_1 + M_2)/M_1 M_2\}^{1/2}$$
$$\times (\Gamma/h)\{R^2/(kT)^{1/2}\} \cdot 2(\pi/3)^{1/2} Q \cdot \exp(-3Q^2) \tag{14}$$

で与えられる．この式に定数値を代入すれば次の形に書き替えることができる

$$P = 5.3 \times 10^{25} \rho x_1 x_2 \Gamma\{(A_1{+}A_2)^3/{A_1}^4{A_2}^4{Z_1}^3{Z_1}^3\}(8R/a)^2$$
$$\times [4250/T^{1/3}\,\{A_1 A_2 {Z_1}^2 {Z_1}^2/(A_1{+}A_2)\}^{1/3}]^2$$
$$\times \exp[-(4250/T^{1/3})\{A_1 A_2 {Z_1}^2 {Z_1}^2/(A_1{+}A_2)\}^{1/3}] \tag{15}$$

この式で $h\Gamma$ は eV 単位で表わしてあり，

$$a = h^2(M_1 + M_2)/e^2 M_1 M_2 Z_1 Z_2$$

は系の Bohr 半径である．密度や化学組成に無関係な量は

$$\lambda = (M_2/x_2)(P/\rho x_1) \tag{16}$$

である．$\lambda\rho x_1 = M_2 P/x_2$は与えられた type 2 の核が type 1 の任意の核と反応を起こす毎秒の確率を表わしている．もし他に type 2 の核を作る別の反応がなければ，$1/\lambda\rho x_1$は type 2 の核の平均寿命を与える．

Bethe は陽子誘導反応の実験結果を用い，(12)によって $T = 2 \times 10^7$ K，$\rho x_1 = 30$ gr/cc に対して種々の核の平均寿命を計算している．その結果を，最近の実験結果に基づいて修正し，表 14.10 に示してある．

この表に示された平均寿命を一見して矛盾を感ずるかも知れない．何故なら，核変換がかなり頻繁に起こるには軽原子核（$Z_2 < 8$～9）との反応を考えなければならない．ところが軽い核は極めて急速に崩壊してしまうので，そのようなものを継続的なエネルギー源としては利用できないだろうと思われるからである．この矛盾を解決する 1 つの方法は軽い核を含む一連の核反応の連鎖を考えて，それに関係する核が永久に崩壊してしまわないようにすることである．Bethe らの研究で示されたように，実際，このような連鎖反応は炭素と窒素の

同位元素を用いて次のように作ることができる．

$_6C^{12}$核が $_1H^1$ と衝突する場合に，唯一可能な反応は輻射捕獲によって $_7N^{13}$ になることである． $_7N^{13}$は陽電子ー活性 positron-active な核であって，平均寿命 10.13 分で崩壊し，安定な炭素同位元素 $_6C^{13}$となる． $_6C^{13}$は $_1H^1$と衝突しても崩壊は起こらず，唯一可能な反応は $_1H^1$を輻射捕獲して $_7N^{14}$になることである． $_7N^{14}$は矢張り $_1H^1$を輻射捕獲し $_8O^{15}$に変換することができる． $_8O^{15}$は陽電子ー活性な核で，平均寿命約 2 分で崩壊して安定な $_7N^{15}$核になる．この $_7N^{15}$は $_1H^1$との衝突で $_6C^{12}$と $_2He^4$（α粒子）に崩壊する．前述の注意によって，この最後の反応は以上の反応の中，最大の確率断面積を持っている．今述べた反応の系列は次のように図示することができる（前前ページ挿入図）．

このように触媒 catalysis の作用をする炭素，窒素の同位元素によって，4 個の陽子は 1 個のヘリウム核に変換される．この循環の間には，2 個の陽電子が放出されるので荷電も保存されている．これら 2 個の陽電子は直ちに電子と結合して消滅し，γ線に変わる． （$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma + 1.022$ MeV）．

核反応の立場から，この炭素循環の最も著しいことは輻射捕獲が次々に起こることである．これは。 $_6C^{12}$， $_6C^{13}$， $_7N^{14}$の核が，陽子との衝突では 2 つ以上の粒子に分裂するのに十分なエネルギーを持つ複合核を形成できないために可能である．これは，更に安定核の既知の質量からきている．

炭素循環の種々な反応の実験的データーが第 11 表にまとめてある．

TABLE 14.11. EXPERIMENTAL DATA ON THE CARBON CYCLE

Reaction	Data
$C_6^{12} + H_1^1 \rightarrow N_7^{13}$	$\hbar\Gamma = 12$ ev
$N_7^{13} \rightarrow C_6^{13} + \beta^+ +$ neutrino	Half life 10.13 min
	$E_{max} = 1.24$ mev $= 1.30$ mmu
$C_6^{13} + H_1^1 \rightarrow N_7^{14}$	$\hbar\Gamma = 56$ ev
$N_7^{14} + H_1^1 \rightarrow O_8^{15}$	$\hbar\Gamma = 110$ ev
$O_8^{15} \rightarrow N_7^{15} + \beta^+ +$ neutrino	Half life 126 sec
	$E_{max} = 1.76$ mev $= 1.85$ mmu
$N_7^{15} + H_1^1 \rightarrow C_6^{12} + He_2^4$	$\hbar\Gamma = 4 \times 10^5$ ev

この表に示された定数は第 10 表の平均寿命を計算するのに使われている．

この炭素循環の反応は，従って，前述の矛盾を解決している：それは軽い核

とで起こっており，参加する核は何時までも破壊されてしまわない．それらは水素からヘリウムへの変換でただ触媒の作用をするだけである．さてこの炭素循環が太陽や主系列高温星の観測されたエネルギー生成率を説明する適当なエネルギー源を提供することを示そう．

既に述べたように，4 個の水素原子が 1 個のヘリウム原子に変換すると，28.6 milli-mass unit に相当するエネルギーが遊離される（§6.13）．しかしながら，この変換が炭素循環によって完成される時は実際に利用できるエネルギーは途中に起こる 2 つの β 過程のために，それより幾分少なくなる．何故なら β 過程では β 線スペクトルの最大のエネルギーの一部分だけが電子の運動エネルギーの形で利用でき，残りはニュートリノ neutrino に行ってしまう（ニュートリノは β 過程で電子と同時に放出されると考えられている）．そしてニュートリノは物質とはごく弱い相互作用しかしないと信じられているので，それらは恒星のように巨大な物体でさえ何の抵抗もなく貫通してしまうと想像される．従ってニュートリノに渡されたエネルギーは恒星の熱源にはならずに全く失われてしまう．こうして約 5/8 のエネルギーが失われると推定されるので炭素循環に含まれる 2 つの β 過程で，ニュートリノ放出で損失するエネルギーは第 11 表より

$$(1.30 + 1.85) \times (5/8) = 2.0\ \mathrm{mmu}\ (\mathrm{milli-mass\ unit})$$

である．従って 1 回の炭素循環が完了した時に遊離されるエネルギーは

$$28.6 - 2.0 = 26.6\ \mathrm{mmu} = 0.0266 \cdot M_H c^2\ \mathrm{erg}$$

であり，これに対するエネルギー生成率は最も起こり難い反応数 P (15)式

$$P = x_{\mathrm{N}}/M_{\mathrm{N}} \cdot t = \lambda \rho x_{\mathrm{a}} x_{\mathrm{N}}/M_{\mathrm{N}}$$

を掛け

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 0.0266 M_{\mathrm{H}} c^2 \cdot \rho \\ &= 0.0266 M_{\mathrm{H}} c^2 x_{\mathrm{N}} / M_{\mathrm{N}} \cdot t \\ &= 0.0266 c^2 x_{\mathrm{N}} / 14 \cdot t \end{aligned} \tag{17}$$

で与えられる．ここでtは（実質的には最も長い$_7\mathrm{N}^{14}$反応で決まる）炭素循環の周期であり，x_{N}は質量による窒素の相対量である．$T = 2 \times 10^7$ K，$\rho X = 30$ gr/ccでは第 10 表より$t = 2.2 \times 10^6$年であり，窒素の相対量$x_{\mathrm{N}} \sim 1$ %と仮定すれば，(17)式は

$$\begin{aligned}\varepsilon &= [\{0.0266 \times (9 \times 10^{20}) \times 0.01\}/\{14 \times (2.2 \times 10^6 \times 3.16 \times 10^7)\}] \\ &= 246 \ \mathrm{erg/g \cdot sec}\end{aligned} \tag{18}$$

同様に$T = 1.6 \times 10^7$ K，$\rho X = 120$ g/ccでは$t = 4.1 \times 10^7$年となり

$$\varepsilon = 13.2 \ \ \mathrm{erg/g \cdot sec} \tag{18'}$$

となる．これらは明らかに太陽のエネルギー生成率を説明するのに要求されるオーダーである．

もし炭素循環が主系列早期星に対しても満足なものであるとすれば，ε は温度Tに極めて敏感なはずである．何故なら，太陽の中心温度の高々 30 % だけ高温なシリウス A（Sirius A の WR は太陽の 1.3 倍）が太陽の 40 倍も大きい光度Lを持っているからである．実際，炭素循環はこれを説明し得るほど温度に敏感なのであるが，これは次のようにして判る．［註 1.3[14]〜40］

エネルギー生成率 ε は循環中最も遅い反応（$_7\mathrm{N}^{14}$反応）の確率に比例するので(15)式から

$$\varepsilon = \mathrm{const}\, T^{-3/2} \exp[-4250\{A_1 A_2 {Z_1}^2 {Z_1}^2/(A_1 + A_2)\}^{1/3} T^{-1/3}] \tag{19}$$

となるが，この式から

$$(T/\varepsilon)(\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}T) = -(2/3) + (1417/T^{1/3})\{A_1 A_2 {Z_1}^2 {Z_1}^2/(A_1+A_2)\}^{1/3}$$
$$= f(T) \tag{20}$$

即ち$T = 2 \times 10^7\mathrm{K}$で（炭素循環の $_7\mathrm{N}^{14}$'4 反応では）$f(T)$~18となるので

$$(T/\varepsilon)(\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}T) = 18,\ (\mathrm{d}\varepsilon/\varepsilon) = 18(\mathrm{d}T/T),\ \varepsilon = \mathrm{const}\,T^{18}$$

となり，この温度あたりではεは実質的にT^{18}に比例する．同様に$T = 1.6 \times 10^7\mathrm{K}$あたりでは$\varepsilon$は実質的に$T^{20}$に比例する．これらの高次のために，$T$の30 %増加は$\varepsilon$の値にして約 110 倍，190 倍に相当する．

以上のような炭素循環の定量的な特徴から，この循環が太陽や高温星のエネルギー生成の問題の全ての要求を満たしていることが判る．ただしεの計算に用いられる循環の周期は実質的に最も反応の緩やかな $_7\mathrm{N}^{14}$反応の反応時間を用いている．しかし，この反応の確率は実験室での高エネルギー実験で得られる反応確率を（理論曲線に基づきながら）恒星内部での低エネルギー状態まで外挿して求めた反応確率に依存している．原子核実験で時に見られるあるエネルギー状態で反応確率が異常に高くなる共鳴現象が，もし未知の外挿域にあるとすれば，もっと起こり易い反応になるかも知れない．もしこのような事情から，炭素循環の周期が次に緩やかな $_6\mathrm{C}^{12}$反応に反応時間で決まることになればεは 10 倍も大きくなるであろう．

以下の理論では炭素循環が恒星の主要なエネルギー源の 1 つを与えることを認めて進めよう．